朝倉物理学大系
荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子＝編集

6

高エネルギー物理学の発展

長島順清
[著]

朝倉書店

編集

荒船次郎
東京大学教授

江沢　洋
学習院大学教授

中村孔一
明治大学教授

米沢富美子
慶應義塾大学教授

はじめに

素粒子物理学は今，さらなる飛躍を求めて模索の段階にある．本書では，高エネルギー物理学フロンティアの最先端の研究テーマの中から，標準理論を超える新現象探索の試みを集中的にとりあげ解説を試みた．現在までのところ，標準理論に矛盾する現象は皆無と言ってよい．種々の実験データに新理論のつけ込む余地は，ただ一つの例外(ニュートリノ振動現象)を除いてほとんどなく，それも標準理論の訂正というよりはわずかな拡張を必要としているのみという方が正しいであろう．その意味で標準理論の実験的裏付けは非常に強固である．数学的にも整合性のとれた体系であり，これからも一つの学問体系として生き残りかつ発展するであろうことは間違いない．しかし，古典力学や電磁気学の限界を打開する試みから量子力学や相対性理論が生まれたように，新たな展開を目指すためには，標準理論を超える新現象を見つける必要がある．

標準理論には適用限界がある．エネルギースケールが TeV (10^{12} 電子ボルト)を超える現象，ミクロのサイズにして 10^{-17}cm 以下の現象に対しては，標準理論の予言能力は大幅に低下する．この領域を探検して手がかりを得るのは一つの方法である．もう一つの方法としては，電弱強の大統一理論，さらには重力をも含む究極の統一理論を目指し，その試みの中から新物理へのヒントを探すことである．大統一の階層性という理論的謎を解く解決法の多くは，やはり TeV 領域に新現象の出現を予言する．したがって，新現象を発見するための最も正統的な試みは，TeV 領域の加速器をつくり実験してみることである．

一方，大統一理論や重力理論の本格的検証に必要な，エネルギーが 10^{13} ~10^{16}TeV 領域での実験は，近い将来にはとうてい実現不可能である．幸いなことに，素粒子統一理論が初期宇宙の発展解明につながることがわかり，イ

ンフレーションのアイデア提起など宇宙論を大きく発展させた．逆に宇宙論の発展が，ビッグバン遺跡の探索という，現代技術では到底実現不可能な高エネルギー現象に対する検証の道を開いた．つまり狭いながらも大統一理論検証への窓は開いており，非加速器素粒子物理という新しい分野が発展しつつある．

本書は，まず標準理論の枠内にあるが，実験の結果次第では標準理論を超える可能性のあるテーマとして，第2章でCP非保存現象の小林-益川モデルを，第3章でヒッグス粒子の性質と発見法を議論する．ヒッグスは標準理論の根幹をなす真空相転移概念における要の粒子である．第4章ではニュートリノ現象を，第5章では大統一と超対称性を解説し，非加速器実験と加速器実験の両面から標準理論を拡張しあるいは超える方法を模索する．第6章では，インスタントンやカイラル異常など標準理論に内在するもののこれまでとは異質の新概念を紹介し，自然現象との関わりを述べる．発展如何では伝統的物質観の修正を迫られる可能性を見てのことである．強い相互作用のCP保存を理解するには第6章で紹介するアクシオンの存在が，また大統一理論を認めるならば第7章で扱う磁気単極子(モノポール)の存在は不可欠のように思える．これらの未発見素粒子の存在やニュートリノの質量問題は，初期宇宙の発展や暗黒物質の解明と密接に絡んでいるので，第8章では素粒子との関わりに重点を置きつつビッグバンから現在に至る宇宙の発展を概観した．この章は，素粒子物理を直接に扱うわけではないので最後に置いたが，ニュートリノやアクシオンさらには暗黒物質の宇宙における役割を理解するためには，先に読んでおく方が理解が深まるかもしれない．筆者個人の主観が入るにしても，本解説の中で取り上げたトピックの半数が非加速器物理のテーマであり宇宙のテーマでもあることは，21世紀における高エネルギー物理学の発展方向を暗示する．

本書の対象は，実験家もしくは大学院の理論学生である．すなわち，素粒子物理の基本知識はもつが，個々のトピックについてはこれから入門的知識を得ようとする読者を想定している．そのため，本解説は各トピックごとに独立させ，かつ読み切りとして辞典に準じた構成とした．各章とも，非専門家向けにまず基本概念の説明と可能な限り(つまり筆者の能力の範囲で)式の導入を行い，その後で実験的検証の現状にふれた．興味に応じてどの章やどの節を切り取って読んでいただいてもよい．本書に至る前段階として，素粒子物理学への

入門用にまず朝倉物理学大系の第3巻「素粒子物理学の基礎Ⅰ」で場の理論の基礎を解説した．第4巻「素粒子物理学の基礎Ⅱ」ではクォークモデルが確立し標準理論が誕生する経緯を描き，そして第5巻「素粒子標準理論と実験的基礎」ではほとんどすべての実験事実を標準理論が見事に説明する有様を解説した．本書は，上記の解説書のなかで説明し残したことと未解決の問題点を整理し，これからの発展方向について筆者なりの見地でまとめたものである．素粒子物理学の初歩から取り組む場合は4巻全部をまとめて，素粒子現象解説の観点からは後の3巻をまとめてはじめて整合性のある体系となる．ただし，各巻は論理的には閉じた構成にしてあり，独立本としての体裁は保つようにしたので，興味に応じて適当に取捨選択していただいてもよい．本書と合わせてご利用いただければ幸いである．

本書のように読み切り短編集に近いスタイルの解説は，通常，テーマごとにその道の専門家が担当する．新しいアイデアと最新データが日夜更新される最先端のトピックをフォローし，間違いを起こさずに深く掘り下げるにはそれが最上の方法だからである．にもかかわらず身の程わきまえずに筆者があえて挑戦したのは，対象とする読者層を限れば，一人の筆者が一つのスタイルで一つの体系を整合的に描写する解説書にはそれなりの意義があるはずと考えたからである．筆者は実験家である．測定器の作り方やデータの解析法には習熟していても，この解説で述べてある理論的な発展に何一つアイデアを提供したことはない．内容はすべて他人の論文ないしは解説書の受け売りからスタートしたものである．実験データについても自分の専門以外は同様である．理論的に見当違いの論理を展開しているか心配であるし，実験的にもその分野では常識のことを間違って受け止めている可能性は多々ある．現に編者による査読の段階で初歩的な間違いをいくつか指摘された．読者も間違いを見つけたら遠慮なく筆者に指摘していただきたい．

終わりに，本書を執筆する機会を与えて下さった編者の荒船次郎氏と江沢洋氏に感謝する．特に荒船氏には全編を通して詳細に査読していただき，いろいろコメントをいただいた．また，郷田直輝氏には第8章についてご批判をいただいた．言うまでもないことながら，本書の誤りについては筆者に全責任がある．また，この執筆のため筆者の研究室スタッフ学生諸氏にはいろいろご協

力をいただいた．この場を借りて感謝の意を表させていただく．最後に，4 冊もの大きな解説書になってしまい，そして初稿から最終稿に向けて大幅な書き直しがあったにもかかわらず，長期間にわたって快く面倒を見ていただいた朝倉書店の方々に感謝の意を表する．

1999 年 5 月

大阪にて　　長島順清

目　　次

1
序　　　論

1.1　標準理論の考え方

物質の究極構造物である素粒子と素粒子を構造体に組み上げる力の統一理論が提唱されて30年になる．標準理論は，極端な超高エネルギー現象を扱わない限りは数学的に整合性がとれており，実験的にはわれわれの知る限りでの素粒子現象をほぼ完璧に記述する．しかし，よりミクロな，より高エネルギー現象を求めて素粒子物理学は現在も発展しつつある．高エネルギー物理学の発展を見通すためには，標準理論の検証状況をまず概観しておく必要があろう．標準理論の根底にある考え方を考察し，歴史的にどのように検証されていったかを眺めることにより，高エネルギー物理学の発展へ参入する準備をする．

標準理論が新しくもたらした物質観のなかで最も革命的な要素は真空に対する概念であろう．標準理論によれば，真空は何もない無の空間ではなく，物性における媒質のように何か（ヒッグスと呼ぶ）が詰まっている力学的構造体である．したがって真空自身エネルギーをもつことが可能であり，環境変化に応じて真空自体の性質も変わりうる．ヒッグス場は自己相互作用をもち，温度が下がると特定の配位をもつようになる（対称性の自発的破れ）．すなわち真空は温度によってその相を変える．標準理論の要諦は，われわれの住む世界が極低温状態にありヒッグス粒子の凝縮したいわば超伝導相状態にあると認識することにある．相転移に応じて個々の素材としての素粒子の性質も変わりうる．素粒子のもつ質量はそのように後天的に付加された力学的性質の一つと見なされる．すなわち，標準理論は，素粒子の本来の質量はゼロであるという立場をとる．物質の根源要素であるフェルミオン（クォークとレプトン）はカイラル

不変性によって，力を媒介するゲージボソンはゲージ不変性によって，質量がゼロであることの理論的根拠をもつ．これらの対称性が自発的に破れ（相転移が起こり）質量が発生するメカニズムをヒッグス機構という．現実の世界では，フェルミオンと電弱相互作用のゲージボソンが質量をもち，カイラル不変性とゲージ不変性がともに破れているように見えるが，ヒッグス機構を採用することにより，有限質量の素粒子群の相互作用を，ゲージ理論の範囲内で扱うことが可能になる．

標準理論で扱う物質構成粒子には次の3世代6種類のクォークとレプトンがある．

$$\begin{bmatrix}\nu_{eL}\\ e^-{}_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_{\mu L}\\ \mu^-{}_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_{\tau L}\\ \tau^-{}_L\end{bmatrix},\quad e_R,\quad \mu_R,\quad \tau_R$$

$$\begin{bmatrix}u_L\\ d'_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_L\\ s'_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_L\\ b'_L\end{bmatrix},\quad u_R,\quad d'_R,\quad c_R,\quad s'_R,\quad t_R,\quad b'_R \tag{1.1}$$

ここに，$u_L, \cdots$ の指標 L はカイラル固有状態が負の左巻き粒子を表し，指標 R はカイラル固有状態正の右巻き粒子を表す．d', s', b' は，弱い相互作用をするときの固有状態で，質量固有状態の d, s, b とは小林-益川行列で結びついている量である（第2章参照）．

これらの物質構成粒子が，それぞれのもつ電磁力，弱い力，強い力によって結びつき，物質構造をつくりあげる．素粒子の相互作用を記述する数学の枠組みはゲージ理論である．弱い相互作用と電磁相互作用（合わせて電弱相互作用）は，素粒子のもつハイパーチャージ（超電荷）とアイソスピンにより引き起こされる．電弱相互作用は $SU(2)\times U(1)$ 対称性に従うゲージ理論により記述されるが，上記のヒッグス機構により対称性が自発的に破れる．ただし電磁相互作用部分は厳密なゲージ対称性が成立していて，フォトンの質量はゼロのままである．一方，強い相互作用はクォークのもつカラー荷により生じる．カラーには3種類あり，$SU(3)$ 対称性に従うゲージ理論（QCD : quantum chromodynamics）では，電弱相互作用と違い真空の対称性の自発的破れは起きておらず，厳密な（ゲージ粒子の質量が0という意味）ゲージ対称性に従うと見なされている．しかし，低温（$T \ll \Lambda \simeq 200$ MeV）ではクォーク対が凝縮しカイラル対称性が自発的に破れる．ヒッグスが存在しないにもかかわらず力

学的な要因でヒッグス的な力学構造が構成される有りさまは，超伝導におけるクーパー対によく似ている．カラーは左巻きと右巻きを区別せず，QCD ではパリティ保存が成立する．しかし，カラー力の自己相互作用機能によりカラーが現れない閉じ込め相が実現しており，クォークやゲージ粒子のグルーオンを単独には取り出せない．低エネルギーでは，クォークとグルーオンの多重相互作用を扱う必要があり，格子ゲージ理論など非摂動的取扱いが必要である．高エネルギーではクォークとグルーオン（合わせてパートンと呼ぶ）は，ジェットとして観測されるので，QCD の検証にはパートンとジェットの対応付けが必要である．理論的に厳密な対応づけはまだできていないが，QCD をガイドラインとしたハドロン化モデルによりジェットデータを定量的に再現することはできており，QCD の精密検証が可能である．

1.2 標準理論の構造

1.2.1 電弱相互作用のラグランジアン

電弱相互作用の従う電弱統一理論は，上記の物質構成粒子群がカイラル対称性を満たし，$SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論に従うというところから出発する．フェルミオンの右巻き成分と左巻き成分は，それぞれ独立なハイパーチャージ（超電荷 Y）とアイソスピン（I, I_3）をもつ．すなわち，相互作用が左巻き粒子と右巻き粒子で異なる．運動方程式のもととなるラグランジアンはゲージセクターとヒッグスセクターに分けられ，それぞれがゲージ対称性を満たすようになっている．ゲージセクターは，フェルミオン（クォークとレプトン）とゲージボソンの自己エネルギーおよび相互作用部分である．ヒッグスセクターはヒッグスの自己エネルギーおよびヒッグスに結合するすべての粒子の相互作用を含む．フェルミオンおよびゲージボソンの質量は，ヒッグスの自己相互作用による真空の自発的対称性の破れの結果として，ヒッグスセクターに生じる物理量である．フェルミオンとゲージボソンの相互作用が引き起こす現象を計算するときは，質量項を含める必要があるが，質量項だけをヒッグスセクターから分離すると，そこの部分のゲージ不変性は破れる．トリー近似を扱う場合はその差は重要ではないが，高次効果を考慮するときは両セクターの寄与をす

べて取り入れなければならない．

後の議論のため，$SU(2)$ 対称の 2 重項である電子とニュートリノについて，$SU(2)\times U(1)$ 対称性を満たす全ラグランジアンを書き下ろす．他の 2 重項も同様に扱う．

$$\mathcal{L}_{GWS}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+\overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_\mu\Psi_L+\overline{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R$$
$$+(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)-V(\Phi)-f_e[\overline{e}_R(\Phi^\dagger\Psi_L)+(\overline{\Psi}_L\Phi)e_R] \tag{1.2}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu-g_W\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{W}_\nu \tag{1.3 a}$$

$$B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu \tag{1.3 b}$$

$$D_\mu=\partial_\mu+ig_W\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{t}+i(g_B/2)B_\mu\cdot Y \tag{1.3 c}$$

$$V(\Phi)=\lambda\left(|\Phi|^2+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 \tag{1.3 d}$$

$$\Psi_L=\begin{bmatrix}\nu_L\\ e_L\end{bmatrix} \tag{1.4 a}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{bmatrix},\qquad \Phi^c=i\tau_2\Phi^\dagger=\begin{bmatrix}\phi^{0\dagger}\\ -\phi^-\end{bmatrix} \tag{1.4 b}$$

太文字で表した量はアイソスピン空間のベクトルである．すなわち $\boldsymbol{F}=(F^a, a=1\sim3)$．ラグランジアン (1.2) の第 1 行目がゲージセクター，第 2 行目がヒッグスセクターである．これに W^0 と B の混合を取り入れ Z と A で書き直したうえで対称性の自発的破れを入れれば，グラショー-ワインバーグ-サラム (Glashow-Weinberg-Salam) 理論のラグランジアンが得られる．

a. B と W^0 の混合

B と W^0 は同じフェルミン対に結合するので混合が生じ，フォトン場 A と中性のボソン Z となる．混合角を θ_W (ワインバーグ角) として

$$Z_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(g_W W^0{}_\mu-g_B B_\mu)\equiv\cos\theta_W W^0{}_\mu-\sin\theta_W B_\mu \tag{1.5 a}$$

$$A_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(g_B W^0{}_\mu+g_W B_\mu)\equiv\sin\theta_W W^0{}_\mu+\cos\theta_W B_\mu \tag{1.5 b}$$

この結果，A^μ の結合する量子数 (電荷) は，$Q=I_3+Y/2$ と書き表される．各粒子について $Q_L=Q_R$ が満たされるので，電磁相互作用はパリティを保存する．この Z_μ と A_μ を代入し，$Q=I_3+Y/2$ を使って書き直し，A_μ とフェル

ミオン場の結合定数を e と読み替えると，ゲージセクターのラグランジアンの相互作用部分は次のように変形される．

$$\mathcal{L}_{INT} = -[e\overline{\Psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}Q\Psi + (g_W/\sqrt{2})\overline{\Psi}_L\gamma^{\mu}(W^{+}{}_{\mu}\tau_{+} + W^{-}{}_{\mu}\tau_{-})\Psi_L + g_Z\overline{\Psi}\gamma^{\mu}Z_{\mu}(I_{3L} - Q\sin^2\theta_W)\Psi] \tag{1.6 a}$$

$$g_W = \frac{e}{\sin\theta_W}, \qquad g_Z = \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W} \tag{1.6 b}$$

ワインバーグ角 $\sin^2\theta_W$ は，標準理論の範囲では計算できない与えられたパラメターであり，$\simeq 0.234$ の値をもつ．

b. フェルミオン質量項

対称性の自発的破れで，ヒッグス場が真空期待値 v をもち

$$\Phi \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ (v+\varphi)/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \Phi^c \longrightarrow \begin{bmatrix} (v+\varphi)/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

となるものとする．フェルミオンの質量項は，(1.2) 式のヒッグスセクター第3項に対称の自発的破れ (1.7) を入れてやれば，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YUKAWA}} = -f_e[\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R](v+\varphi)/\sqrt{2} = -m_e\bar{e}e - \frac{m_e}{v}\bar{e}e\varphi \tag{1.8 a}$$

$$m_e = f_e v/\sqrt{2} \tag{1.8 b}$$

となる．アイソスピン $I_3 = -1/2$ の d クォークの質量は，結合定数 f を変えるだけで同じ方法で質量をつくれる．u クォーク質量発生には Φ^c を使えばよい．エネルギーが Λ_{QCD} 以下のエネルギースケールになると，クォーク対が凝縮して実効的にヒッグス場を構成し，カイラル対称性の破れの結果としてクォークには余分の質量が付加される．

c. W と Z の質量項

$W^{\pm}$ と Z の質量項はヒッグスの運動エネルギー項 ((1.2) 式第2行第1項) で

$$\Phi \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

の置き換えをしてやれば取り出せて，

$$m_W = \frac{g_W v}{2}, \qquad m_Z = \frac{g_Z v}{2} = \frac{m_W}{\cos\theta_W} \tag{1.9}$$

を得る．弱い相互作用のフェルミ結合定数とは次の関係で結びついている．

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g_W{}^2}{8m_W{}^2}=\frac{e^2}{8m_W{}^2\sin^2\theta_W} \tag{1.10}$$

$$v=2m_W/g_W=(\sqrt{2}G_F)^{-1/2}=250\ \mathrm{GeV} \tag{1.11}$$

d.　ヒッグス相互作用

(1.2) 式のヒッグスセクターに (1.7) を入れてやれば，ヒッグスの相互作用が得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H=&\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-m_H{}^2\varphi^2)-\lambda v\varphi^3-\lambda\frac{\varphi^4}{4}\\&-(\sqrt{2}G_F)^{1/2}\sum_f m_f\varphi\bar{f}f\\&+2(\sqrt{2}G_F)^{1/2}\varphi\left(m_W{}^2W^+{}_\mu W^{-\mu}+\frac{m_Z{}^2}{2}Z_\mu Z^\mu\right)\\&+\sqrt{2}G_F\varphi^2\left(m_W{}^2W^+{}_\mu W^{-\mu}+\frac{m_Z{}^2}{2}Z_\mu Z^\mu\right)\end{aligned} \tag{1.12 a}$$

$$m_H{}^2=-2\mu^2=2\lambda v^2 \tag{1.12 b}$$

e.　ρ-パラメター

荷電カレントのフェルミ結合定数 G_F を，式 (1.10) で定義したように，中性カレントのフェルミ結合定数 G_N を次式で定義する．

$$\frac{G_N}{\sqrt{2}}=\frac{g_Z{}^2}{8m_Z{}^2} \tag{1.13}$$

ρ は高次の効果を含めた中性カレント結合定数と荷電カレント結合定数の比として定義される．

$$\rho\equiv\rho_{\mathrm{tree}}(1+\varDelta\rho)\equiv\frac{G_N}{G_F} \tag{1.14 a}$$

$\varDelta\rho$ は高次の補正効果である．W, Z ゲージボソンの重いフェルミオンやヒッグスのループによる効果が大きいので，ρ の精密データと高次計算値を合わせることによりトップクォーク質量が推定できる．トップは予想通りのところで発見されたので，現在はヒッグス粒子質量の推定に使われる．ヒッグス質量が推定した後は新粒子（すなわち新物理）の発見に有力な手段となる．ρ はまた

$$\rho=\rho_{\mathrm{mass}}=\frac{m_W{}^2}{m_Z{}^2\cos^2\theta_W{}^2} \tag{1.14 b}$$

によっても定義できる．標準理論とは違って，ヒッグス粒子が複数個ある場合

は，W, Z の質量は，式 (1.9) の代わりに v_i を中性ヒッグス場の真空期待値，I_i をヒッグスのアイソスピンとして，

$$m_W{}^2 = \frac{g_W{}^2}{2} \sum_i v_i{}^2 [I_i(I_i+1) - I_{3i}{}^2] \tag{1.15 a}$$

$$m_Z{}^2 = \frac{g_W{}^2}{2\cos^2\theta_W{}^2} \sum v_i{}^2 (2I_{3i}{}^2) \tag{1.15 b}$$

と変更されるので，トリー近似の段階では

$$\rho_{\text{mass}} = \frac{\sum v_i{}^2 [I_i(I_i+1) - I_{3i}{}^2]}{\sum v_i{}^2 (2I_{3i}{}^2)} \tag{1.16}$$

となる．余分に存在するヒッグス場が，3 重項を含めば $1/2 \leqq \rho_{\text{mass}} \leqq 1$ となるが，2 重項を考える限りヒッグス場が複数あっても，トリー近似の段階では，$\rho = \rho_{\text{tree}} = \rho_{\text{mass}} = 1$ である．質量殻による $\sin^2\theta_W$ の定義 ($\sin^2\theta_W \equiv 1 - m_W{}^2/m_Z{}^2$) では ρ の高次効果を $\sin^2\theta_W$ の中に取り込んでしまうので，ρ_{mass} は定義によって 1 となり，高次補正効果を受けない．

1.2.2 QCD ラグランジアン

QCD は，厳密な $SU(3)$ 対称性をもつゲージ理論であり対称性の自発的破れを伴わない．クォークを $\psi = (R, G, B)$ のように表すと，QCD ラグランジアンは，

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{F}^{\mu\nu} \tag{1.17 a}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{t} = \partial_\mu + ig\sum_{k=1}^{8} A_{k\mu}\frac{\lambda_k}{2} \tag{1.17 b}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu - g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu \tag{1.17 c}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = (F_{k\mu\nu}\,;\, k = 1 \sim 8)$$

で与えられる．$\boldsymbol{t} = (t_k\,;\, k = 1 \sim 8)$，$t_k = \lambda_k/2$ は生成子の 3×3 表現行列である．量子場の場合は，ゲージ固定項や幽霊スカラー項が付加される．QCD は非可換ゲージ理論であり，$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ は $\boldsymbol{A}_\mu$ の非線形項を含む．QCD 特有の種々の力学的性質はこの性質に帰着できることが多い．

i） 漸近自由と繰り込み群方程式　QCD の結合定数は，$\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ で定義され，反応の最低次（トリー近似）では定数であるが，高次効果を取り入れ

ると関与するエネルギースケール Q の関数となる（実効結合定数：running coupling constant）．高次効果計算に出現する無限大の発散を繰り込むと，代償として，繰り込みスケールエネルギー μ を導入せざるをえなくなる．観測量は繰り込み点 μ^2 のとり方に依存してはいけないから，物理量の μ^2 による変化は α_s の変化と相殺しなければならない．物理量を P として，その物理量が現れるエネルギースケールを Q とすると，次元解析により P は $\tau=\ln(Q^2/\mu^2)$ の関数となり，繰り込み群方程式

$$\mu^2\frac{\mathrm{d}P(\tau,\alpha_s)}{\mathrm{d}\mu^2}=\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\mu^2\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu^2}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)P(\tau,\alpha_s)=0 \tag{1.18 a}$$

が成立しなければならない．これは

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)P(\tau,\alpha_s)=0 \tag{1.18 b}$$

という形に書き直せる．ただし，β 関数は

$$\beta(\alpha_s)\equiv\mu^2\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\alpha_s}{\partial\ln\mu^2} \tag{1.19}$$

で定義される関数である．β 関数は実際的には摂動論によってのみ計算可能であるので，次のように展開する．

$$-\beta(\alpha_s(\tau))=\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s{}^2(\tau)+\frac{\beta_1}{8\pi^2}\alpha_s{}^3(\tau)+\frac{\beta_2}{64\pi^2}\alpha_s{}^4(\tau)+\cdots$$

$$\beta_0=11-n_f,\quad \beta_1=51-19n_f/3,\quad \cdots \tag{1.20}$$

ここで新しい関数 $\alpha_s(\tau)$ を

$$\tau=\int_{\alpha_s}^{\alpha_s(\tau)}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\beta(\alpha)} \tag{1.21}$$

で定義し境界条件として

$$\alpha_s(\tau=0)=\alpha_s(Q^2=\mu^2)\equiv\alpha_s \tag{1.22}$$

と設定すると，$\alpha_s(\tau)$ は次の方程式を満たす．

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)\alpha_s(\tau)=0 \tag{1.23}$$

これを (1.18 b) と比較すれば，(1.18 b) は一般解として

$$P(\tau,\alpha_s)=P(0,\alpha_s(\tau)) \tag{1.24}$$

をもつことがわかる．すなわち繰り込み群方程式は，QCD における観測量の μ^2 依存性はすべて $\alpha_s(\mu^2)$ の中にあることを示す．ただし，摂動展開をした場

合は，高次の残余項に μ 依存性が残る．α_s の Q 依存性を求めるのに，(1.20) を (1.23) に入れると

$$\mu^2\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu^2}=-\frac{\beta_0}{4\pi}{\alpha_s}^2-\frac{\beta_1}{8\pi^2}{\alpha_s}^3+\cdots \tag{1.25}$$

となる．摂動の最低次をとると

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)}=\frac{1}{\alpha_s(Q)}+\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{Q^2} \tag{1.26 a}$$

あるいは，

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)}-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\mu^2=\frac{1}{\alpha_s(Q)}-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln Q^2=-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\Lambda^2 \tag{1.26 b}$$

によって，スケールによらない普遍定数 Λ を導入すれば

$$\alpha_s(Q)=\frac{\alpha_s(\mu)}{1+\alpha_s(\mu)\dfrac{\beta_0}{4\pi}\ln\dfrac{Q^2}{\mu^2}}=\frac{1}{\dfrac{\beta_0}{4\pi}\ln\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{1.27}$$

が得られる．Λ は ~200 MeV 程度の値をもつ．非可換ゲージ群では，$\beta_0>0$ であり，$\alpha_s(Q)$ は Q の減少関数である．すなわち漸近自由が成立する．

ii) クォークの閉じ込め　QCD にはヒッグス場による真空の自発的対称性の破れはなく，厳密な意味でゲージ対称性が成立している ($m_g=0$ としてよい)．しかし，非可換ゲージ対称理論に特有のグルーオンの自己相互作用のおかげで，クォークやグルーオンには，通常のクーロン型のポテンシャルのほかに距離に比例するポテンシャルが生じ，自己エネルギーをもつ紐でつながれた状態になる．この結果，クォークやグルーオンを大きく引き離そうとすると真空からクォーク対を拾ってたくさんのハドロンがつくられ，紐はばらばらにちぎれる．すなわち，クォークやグルーオンは単独では分離できず，ジェットとして観測されることになる．

1.3 標準理論の検証*1)

1.3.1 標準理論の確立

電弱相互作用の標準理論が提案されたのは1967年であるが，注目を浴びる

*1) 標準理論の実験的検証の詳細については，本シリーズ第5巻の『素粒子標準理論と実験的基礎』を参照されたい．以下本書では第3, 4巻の『素粒子物理学の基礎 I, II』を文献 I，第5巻を文献 II として引用する．

ようになったのは1971年にト・フーフトにより繰り込み可能であることが証明されてからである．1973 年には欧州原子核研究機構 CERN のガーガメル泡箱ニュートリノ実験で最初の中性カレント現象が発見された．その後，各種中性カレント反応がすべて同じワインバーグ角を与えることが証明されて，1970 年代の終わりまでには，グラショー-ワインバーグ-サラム (GWS) モデルがたくさんのモデルの中から唯一正しいモデルと認識された．1970 年代から 1980 年代にかけては，電子コライダーではドイツのペトラ (PETRA)，米国のペップ (PEP)，日本のトリスタン (TRISTAN) の電子コライダーが活躍し，チャーム (1974)，タウ (1975)，b クォーク (1978) の発見と，生成断面積や角分布非対称性などの精密測定で，$SU(2)\times U(1)$ 構造の精密検証と Z, W 質量値の予言が行われた．1983 年には，セルンの $UA1$, $UA2$ グループがハドロンコライダー (S$p\bar{p}$s) で W, Z を発見し，予言通りの質量値をもつことを確認して，ここに $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論はモデルから電弱相互作用の標準理論へと昇格したのである．

一方，強い相互作用反応ではカラー $SU(3)$ によるモデルが 1964 年頃からいくつか提唱されていた．1973 年に漸近自由が発見され，QCD が強い相互作用物理の理論として急浮上する．1969 年の MIT/SLAC による深非弾性散乱でのブヨルケンスケーリング発見に始まる一連の深非弾性散乱データは，QCD 検証に大いに貢献した．1975 年には PEP の実験でクォークのジェット構造が発見され，さらにチャームスペクトロスコピーやニュートリノ/ミューオン実験で QCD 力学や漸近自由の証拠が蓄積された．1979 年には PETRA でグルーオンが発見されて，QCD もまた 1970 年代終わりまでには，クォークの相互作用を記述する標準理論としての地位を確立した．この時期活躍したハドロン加速器はブルックヘブン研究所の 30 GeV AGS (Alternating Gradient Synchrotron) 加速器，セルンの 24 GeV PS (Proton Synchrotron)，フェルミ研究所の 200 GeV PS である．

1.3.2　標準理論の精密検証

1980 年代後半セルンの LEP ($\sqrt{s}=100 \rightarrow 200$ GeV) とフェルミ研究所のテ

ヴァトロン（TEVATRON : $\sqrt{s}=1.8$ TeV）の稼働開始によって，標準理論の研究は高次効果を含む精密検証の時期に入った．電子-陽電子反応による Z 生成の大きな断面積は，Z 生成に伴う各種反応の精密測定を可能にし，高次効果をテストするのに十分な精度をもたらした．Z の見えないチャネルへの崩壊幅より，軽いニュートリノの数が（したがってたぶん世代数も）正確に 3 であることが確認された．ワインバーグ角 $\sin^2\theta_W$ には，トリーレベルでは同等ないくつかの定義があり，高次効果を入れると差がでてくる．スタンフォード線形加速器センター（SLAC）の SLC（Stanford Linear Collider）の偏極ビームや LEP データは，これらがすべて理論の予想通りであることを示した．標準理論の一つの特徴として，高次効果にはもっぱら質量の大きい粒子の寄与が優勢であることがあげられる．この結果，精密データと高次計算を比較することによりトップとヒッグスの質量値が予言できる．トップは 1984 年にテヴァトロンで発見され，予言通りの質量値であることが確認された．トップクォークの質量が決まってからは，ヒッグスの質量値予想に使われている（第 3 章参照）．

閉じ込め効果によりクォークを単独に取り出せないので，クォーク反応を定量的に扱うのには当初はかなりの困難を伴った．理論でのパートン計算と実験でのジェット現象との対応がつけにくかったのである．この状況に対応するため，パートンからハドロンを発生させる種々の現象論的なハドロン化モデルが提案された．電子反応におけるジェット現象データに合わせ，QCD をガイドラインとして種々の改良を施した結果，ジェットデータの再現性はほぼ満足できるものとなった．この結果ジェット構造が明らかになるとともに QCD の精密検証が可能となった．現在ではグルーオンジェットとクォークジェットの違い，QCD の非アーベル構造（グルーオンの自己相互作用），漸近自由，グルーオンの紐構造などがテストされ，すべて理論の予言通りであることが確認されている．

ハドロン同士の反応については，クォークやグルーオン（まとめてパートン）反応成分のうち柔らかい部分をハドロン内のパートン分布関数に繰り込み，パートンレベルでの固い反応（運動量遷移の大きい反応）を分離できるこ

と (factorization) が QCD を使って証明され，パートン反応を抽出することが可能となって理論との比較検証は大いに発展した．ニュートリノや電子/ミューオンによる深非弾性散乱データからパートン分布関数を決め，発展方程式を使うことにより Q^2 の大きいところでの分布関数が正確に計算できる．この結果，高エネルギーハドロン反応からパートン反応を抽出し QCD の高次効果の精密検証が可能となったのである．現在の QCD は，ジェットの包含反応率が運動変数の関数として 9 桁も変わる状況を見事に再現することができる．このことはまた，ハドロン反応を使用して電弱相互作用反応検証が行えることを意味する．例えばハドロンコライダーLHC (Large Hadron Collider : $\sqrt{s}=$ 16 TeV) を使ってヒッグスを発見することを考えよう．ヒッグス生成反応断面積 (～10 pb×分岐比) は QCD 反応断面積 (～100 mb) に比べて非常に小さく，信号対雑音比は 10 桁以上にもなる．それでいてヒッグス信号抽出が可能なのは，圧倒的に数の大きい QCD 雑音を正確に評価できるからである (第 3 章参照)．

1.4 高エネルギー物理学の発展方向

以下，本書で取り上げるテーマを概観する．現在，標準理論の中の課題として残っている大きなテーマは CP 非保存現象の解明とヒッグス粒子の発見であろう．CP 非保存現象については，小林-益川モデルが標準理論に組み込まれているが，これ以外の可能性についても種々のモデルが提唱されており，実験による検証が待たれる．1999 年には日本の高エネルギー加速器研究機構やスタンフォード加速器センターの B-ファクトリーが稼働予定であり，またハドロンコライダーでの B 物理，HERA-B なども計画されているので，この方面での大きな進展が近い将来に見込まれる．小林-益川モデルは標準理論の中にあるものの，実験データの出方次第では CP 非保存効果が標準理論を超える可能性を提供するという意味で，高エネルギー物理学の発展という本書の主題を担う先鋒を務めるにふさわしい (→ 第 2 章)．

統一理論では，従来は素粒子に付随する固有の物理量とみなされた質量を，真空の相転移の結果として後天的に素粒子に付加された力学的な性質と見な

す．真空を空虚な無の空間ではなくヒッグスの凝縮した力学的構造体とみなすという点において，革命的な思想を持ち込んだといえる．この結果としてゲージボソンが有限質量をもつ場合でもゲージ不変性を保ち繰り込み可能な理論ができて，大統一理論や重力を含む超大統一まで研究対象として扱えるようになった．しかし，質量問題に関しては質量パラメターがヒッグス粒子との相互作用結合定数というパラメターに置き換わっただけで，質量発生メカニズムに対してはなんら本質的な解決法を与えていない．このためにはヒッグス粒子を発見して，その性質を調べなければならない．LEPII（欧州原子核研究機構CERN で稼働中の 100＋100 GeV e^-e^+ コライダー）は，質量値が $\lesssim$105 GeV までのヒッグス粒子ならば発見する能力がある．同じくセルンで建設中の LHC（$\sqrt{s}$＝16 TeV，2004 年稼働予定）では，標準理論で予想されるヒッグス粒子ならば，1 TeV までの発見能力がある．電弱反応データの総合解析や超対称性理論からは，$m_H \lesssim 150$ GeV ぐらいである可能性が強いと予想されており，ヒッグスの質量値を決めることは，単に一つの素粒子パラメターを決めるというだけにとどまらず，質量値そのものが素粒子の階層性や次世代の新物理の有りさまを具現しているという点で大きな意味をもつ．第 3 章ではヒッグス発見法と質量値の与える将来像について議論する．

ニュートリノは，素粒子の中でいろいろな意味で特別な地位を占める．強い相互作用をしない中性の粒子という性質のために，1970 年代には中性カレントの発見で電弱統一理論確立の先駆けとなり，ついで深非弾性散乱でクォークの存在と漸近自由を確立し，QCD 確立にも先駆的な役割を果たしている．ニュートリノの現時点での役割は，まずは自己のもつ質量値の小ささの解明を通して，ヒッグス解明とは別の観点から質量問題に明りを灯すことにある．標準理論では，質量値はヒッグスの真空期待値（250 GeV）にヒッグスとの相互作用の強さ f の積として与えられる．ニュートリノは極端に小さい f の値をもつがゆえに，標準理論では便宜上質量をゼロとして扱わざるをえなかった．この小ささを説明するもっともらしい説明はシーソーメカニズムであるが，これは非常に大きいエネルギースケールしたがって新物理の潜在的存在を暗示する．1998 年の岐阜神岡のスーパーカミオカンデ検出器による大気ニュートリ

ノのニュートリノ振動の発見は，ニュートリノの質量の存在を通して標準理論を超える最初の実験データを提供したという意味で画期的な意味をもつ．大気ニュートリノ振動結果のもつ意味については，現在活発な研究が行われつつあり，ここでこれまでのニュートリノ物理を総括をし，発展方向を探ることは重要である（→ 第 4 章）．

ニュートリノのもつ第 2 の役割は，素粒子と宇宙/天体物理学との橋渡しである．ビッグバン以来の宇宙残存ニュートリノのゆえに，ニュートリノの質量値を決めること自身，そのまま宇宙の暗黒物質解明に大きな役割を果たすことにもなる．しかし，宇宙論にも役立つという間接的な役割を超えて，ニュートリノ自身を天体物理学の手段として使う道が開けたことは大きい．もともとニュートリノの質量値が極端に小さいという理由のため，加速器による質量測定実験には限界があり，天体ニュートリノにその活路を求めざるをえなかった．しかし，この結果，太陽ニュートリノや超新星ニュートリノ観測を通じてニュートリノ天文学という新分野が切り開けたのである．さらに，従来はもっぱら加速器を主たる道具としてきた素粒子物理解明に非加速器素粒子物理という新しい分野を開き，ビッグバン直後の超高エネルギー現象の解明に通じる窓を開いた意義は大きい．

大統一はいうまでもなく QCD と電弱理論を統合する試みである．そのエネルギースケール $\simeq 10^{16}$ GeV が，近い将来に加速器で実現できる可能性はなく本格的な実験は不可能であるが，ビッグバン以来の残留化石を調べたり（例；モノポール），低エネルギー現象として顔を出したり（例；陽子崩壊），またニュートリノ質量問題などでの検証可能性などいくつかの窓が開いている．さらに，大統一や超大統一理論をつくる試みの中から生まれた超対称性の性質など，現在の標準統一理論の欠点を補い，新しい分野に進展する可能性を秘めている．高エネルギー物理学の将来の発展方向性を見きわめる最も直接的なテーマといえる（→ 第 5 章）．

アクシオンは，強い相互作用における CP 問題の解決のために創作された粒子である．残念ながら標準アクシオンの存在は否定され，宇宙論的な見えないアクシオンの存在可能性も日々その窓が閉じられつつある．しかし，アクシオン存在の理論的動機は非常に強く，ソリトン，インスタントン効果，θ 真空，

電弱相互作用相転移時のバリオン数保存の破れなど，優れて理論的な課題と密接に結びついている．宇宙の暗黒物質の候補の一つであることを含め，また通常の加速器実験とはかけ離れた発見手法など，分野を超えたテーマが集中しているがゆえに，高エネルギー物理学発展のための学習意義は大きい（→ 第6章）．

磁気単極子（モノポール）は，本来は電荷に対する磁荷という概念から出発したが，現代のゲージ理論では電磁場と共存するソリトンのことを指す．有限な大きさをもつ構造体であるが，十分離れたところでは磁荷と同じ磁場をつくる．大統一が存在するならば，電弱強相互作用に分化するときに必ず出現することが理論的にいえる．このため精力的にモノポール探索が行われたが，いまだに見つかっていない．理論的な流れとしては，第6章のソリトンの1セクションに含める方が整合性がとれるが，実験的探索自体，一つのテーマとなりうるので独立な章とした（→ 第7章）．なお，インフレーションモデルはモノポールの不在を説明するために提案されたものである．

大統一理論は宇宙論にインフレーションというアイデアを提供し，ビッグバン宇宙論に内在したいくつかの根源的な問題を解決した．さらに宇宙のバリオン数創生のもっともらしいシナリオをも提供している．宇宙の誕生後わずか 10^{-40} 秒近くまで逆上って議論ができるのも全く大統一理論のおかげである．逆に宇宙論の発展が素粒子論にも多くの好ましい影響を及ぼした．大統一スケールのエネルギーを人工的に製造することが不可能であるにもかかわらず，われわれが大統一理論や超対称理論の実験的検証を検討することができるのは，まさにビッグバン宇宙論のおかげである．この意味で，ビッグバン宇宙論の基本を理解し，素粒子物理学との接点にふれておくことは高エネルギー物理学の発展を洞察するために不可欠である（→ 第8章）．

2
小林 - 益川行列

2.1　ヒッグス場による質量生成

2.1.1　弱固有状態と質量固有状態

この章では，標準理論においてCP非保存がどのように取り扱われるかを見てみよう．標準理論において現れる場は，クォークとレプトンのディラック場ψ，ゲージ場W_μとB_μ，そしてヒッグス場ϕである．これらはCPに対して一定の変換性をもつ（II-付録E参照）．自由場のラグランジアンはもともとこの変換に不変なようにできている．問題は相互作用項がどのように変換するかである．このためにまずクォークの質量項から眺めてみよう．クォーク場とヒッグス場を

$$\Psi_{kL}=\begin{bmatrix} u_{kL}' \\ d_{kL}' \end{bmatrix}, \qquad \Phi=\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix}, \qquad \Phi^c=\begin{bmatrix} \phi^{0\dagger} \\ -\phi^- \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

として，クォークとヒッグス場の$SU(2)$不変な相互作用$\mathscr{L}_I(\psi, \phi)$ (1.2) を，一般化すれば，

$$-\mathscr{L}_I(\psi, \phi)=\sum_{j,k}(\sqrt{2}M_{jk}/v)\,\overline{\Psi}_{jL}'\Phi^c u_{kR}'+\sum_{j,k}(\sqrt{2}M_{jk}'/v)\,\overline{\Psi}_{jL}'\Phi d_{kR}'+\text{h.c.} \tag{2.2}$$

と書ける．上式は，ϕ^0が真空期待値をもったときに，それぞれ，u_j'とd_k'に質量が生じるようアレンジしてある．ここに$u_j'=u', c', t', \cdots, d_j'=d', s', b', \cdots$を表す．クォーク場に$'$をつけたのは，これらが弱い相互作用をするときの場であり，必ずしも物理的なクォークに対応していないからである．これを弱固有状態 (weak eigenstate) と呼ぼう．M_{jk}, M_{jk}'はクォーク場とヒッグス

場との結合定数であり，$\sqrt{2}/v$ は後の便宜のために導入したものである．自発的対称性の破れによりヒッグス場が真空期待値 $(\langle\phi^0\rangle=v/\sqrt{2})$ をもつと，(2.2) は，

$$-\mathscr{L}_M=\sum(\bar{u}_{jL}'M_{jk}u_{kR}'+\bar{d}_{jL}'M_{jk}'d_{kR}'+\text{h.c.})+\cdots$$
$$\equiv\bar{U}_L'M^UU_R'+\bar{D}_L'M^DD_R'+\text{h.c.}+\cdots \tag{2.3 a}$$

$$M^U=[M_{jk}],\qquad M^D=[M_{jk}'] \tag{2.3 b}$$

$$U'=\begin{bmatrix}u'\\c'\\t'\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix},\qquad D'=\begin{bmatrix}d'\\s'\\b'\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix} \tag{2.3 c}$$

となってクォーク場の質量項が出現する．…はヒッグスとの相互作用項で以下の議論には必要ない．弱固有状態は一般的には質量の固有状態 (mass eigenstate) ではない．物理現象を記述するには (2.3) を対角化して質量固有状態に直さなければならない．

行列理論によればどんな $(N\times N)$ 行列（エルミートでなくともよい）でも 2 個のユニタリー行列を使って対角化が可能であるから，$A_L, A_R^\dagger, B_L, B_R^\dagger$ を 4 個のユニタリー行列として，

$$M_{\text{dia}}{}^U=A_LM^UA_R^\dagger,\qquad M_{\text{dia}}{}^D=B_LM^DB_R^\dagger \tag{2.4 a}$$

$$M_{\text{dia}}{}^U=\begin{bmatrix}m_u&&&&\\&m_c&0&&\\&&m_t&&\\&0&&\cdot&\\&&&&\cdot\end{bmatrix},\qquad M_{\text{dia}}{}^D=\begin{bmatrix}m_d&&&&\\&m_s&0&&\\&&m_b&&\\&0&&\cdot&\\&&&&\cdot\end{bmatrix} \tag{2.4 b}$$

とできる．ここでユニタリー行列 A_L, A_R, B_L, B_R をうまく選ぶと $m_u, m_c, m_t, \cdots, m_d, m_s, m_b, \cdots$ は正の実数*1) にできる．

*1) m_i は一般に複素数であるが，カイラル変換で実数にできる（§6.2.2 参照）．

$$M_{\rm dia}{}^U M_{\rm dia}{}^{U\dagger}=\begin{bmatrix} m_u{}^2 & & & \\ & m_c{}^2 & 0 & \\ & & m_t{}^2 & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \cdot \end{bmatrix},\quad M_{\rm dia}{}^D M_{\rm dia}{}^{D\dagger}=\begin{bmatrix} m_d{}^2 & & & \\ & m_s{}^2 & 0 & \\ & & m_b{}^2 & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

をつくると

$$M_{\rm dia}{}^U M_{\rm dia}{}^{U\dagger}=A_L M^U A_R{}^\dagger A_R M^{U\dagger} A_L{}^\dagger = A_L M^U M^{U\dagger} A_L{}^\dagger \quad (2.6\,\mathrm{a})$$

$$M_{\rm dia}{}^{U\dagger} M_{\rm dia}{}^{U}=A_R M^{U\dagger} A_L{}^\dagger A_L M^{U} A_R{}^\dagger = A_R M^{U\dagger} M^{U} A_R{}^\dagger \quad (2.6\,\mathrm{b})$$

であるので，A_L, A_R は，それぞれエルミート行列である $M^U M^{U\dagger}$, $M^{U\dagger} M^U$ を対角化するユニタリー行列であることがわかる．(2.4) を使うと (2.3) は，

$$\begin{aligned} -\mathscr{L}_M &= \bar{U}_L{}' M^U U_R{}' + \bar{D}_L{}' M^D D_R{}' + \text{h.c.} \\ &= \bar{U}_L{}' A_L{}^\dagger A_L M^U A_R{}^\dagger A_R U_R{}' + \bar{D}_L{}' B_L{}^\dagger B_L M^D B_R{}^\dagger B_R D_R{}' + \text{h.c.} \\ &= (\overline{A_L U_L{}'}) M_{\rm dia}{}^U (A_R U_R{}') + (\overline{B_L D_L{}'}) M_{\rm dia}{}^D (B_R D_R{}') + \text{h.c.} \\ &\equiv \sum [\, m_j(\bar{u}_{jL} u_{jR} + \bar{u}_{jR} u_{jL}) + m_j{}'(\bar{d}_{jL} d_{jR} + \bar{d}_{jR} d_{jL})] \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる．これはまさに，望むフェルミオンの質量項の形をしている．したがって，質量固有状態のクォークは，弱固有状態から

$$U_L = A_L U_L{}', \quad U_R = A_R U_R{}', \quad D_L = B_L D_L{}', \quad D_R = B_R D_R{}' \quad (2.8)$$

のようにユニタリー変換したものであることがわかる．自由ラグランジアンや，中性カレント相互作用のように，クォークの香り $q_j{}'$ についてはじめから対角化されてあるものは，このユニタリー変換によって，$q_j{}' \to q_j$ と変わるのみであり，弱固有状態で表したラグランジアンと質量固有状態で表したラグランジアンは同一形を保つ．これは中性カレントにおける GIM 機構の一般的記述である．しかし，香りについての非対角要素を結びつけている荷電カレント相互作用 $\mathscr{L}_C$ は事情が異なる．$\mathscr{L}_C$ について弱固有状態を質量固有状態で書き直すと

$$\begin{aligned} -\mathscr{L}_C &= (g_W/\sqrt{2}) \sum [\, \bar{U}_L{}' \gamma^\mu D_L{}' W_\mu{}^+ + \text{h.c.}] \\ &= (g_W/\sqrt{2}) \sum [\, \bar{U}_L \gamma^\mu (A_L B_L{}^\dagger) D_L W_\mu{}^+ + \text{h.c.}] \\ &= (g_W/\sqrt{2}) \sum [\, \bar{U}_L \gamma^\mu V D_L W_\mu{}^+ + \text{h.c.}] \\ &= (g_W/\sqrt{2}) \sum [\, \bar{u}_{jL} \gamma^\mu V_{jk} d_{kL} W_\mu{}^+ + \bar{d}_{kL} \gamma^\mu V_{jk}{}^* u_{jL} W_\mu{}^-] \end{aligned} \quad (2.9\,\mathrm{a})$$

となり，相互作用が各二重項の中で閉じずに世代間の混合が起きる．この行列

$$V = A_L B_L^{\dagger} \tag{2.10}$$

を小林-益川（略して KM）行列と呼ぶ[1)].

これに CP 変換（I, II-付録 E 参照）を施すと

$$-\mathcal{L}_C \xrightarrow{\mathrm{CP}} (g_W/\sqrt{2})\sum[\bar{d}_{kL}\gamma^{\mu}V_{jk}u_{jL}W_{\mu}^{-} + \bar{u}_{jL}\gamma^{\mu}V_{jk}^{*}d_{kL}W_{\mu}^{+}] \tag{2.9 b}$$

となるので，CP 不変性が成立するためには，V が実行列でなければならないことがわかる．

2.1.2 3 世代 KM 行列

一般に $(N\times N)$ ユニタリー行列には N^2 個の独立な実変数が存在する．この N^2 次元の実変数空間において，${}_NC_2 = N(N-1)/2$ 個の実空間回転が定義できるので，行列要素のうち，この個数だけは回転角 θ_j を使って書き表せる．残りは位相角 ϕ_j となる．一方，$2N$ 個のクォーク場には質量項を変化させない位相変換の自由度

$$U \longrightarrow F_U U = \begin{bmatrix} e^{i\phi_u} & & & \\ & e^{i\phi_c} & & \\ & & e^{i\phi_t} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} U \tag{2.11 a}$$

$$D \longrightarrow F_D D = \begin{bmatrix} e^{i\phi_d} & & & \\ & e^{i\phi_s} & & \\ & & e^{i\phi_b} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} D \tag{2.11 b}$$

があるので，この変換によって，

$$V \longrightarrow F_U^{*} V F_D \tag{2.12 a}$$

つまり

$$V_{jk} \longrightarrow \exp[-i(\phi_{uj} - \phi_{dk})]V_{jk} \tag{2.12 b}$$

となるので，全体に共通な 1 個の位相を除いた $(2N-1)$ 個の位相はクォーク場の再定義で吸収できる．結局

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - (2N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \tag{2.13}$$

だけの位相が残る．したがって，$N \leqq 2$ の場合は KM 行列要素 V_{ij} をすべて実数で書き直せるので，CP 非保存効果は現れない．現実には CP が破れているので，$N \geqq 3$ でなければならないというのが，そもそも KM 行列を導入した動機であった．LEP での Z 共鳴幅の測定から $m_\nu < m_Z/2$ のニュートリノは 3 個しかないとわかっているから，$N=3$ と考えるのが自然であろう．このとき，KM 行列は 3 個の回転角と 1 個の位相角で表すことができる．

なお，u, c, t クォーク間，または d, s, b クォークの間で質量が縮退していれば必ずしも CP が破れなくなる．それは次のようにしていえる．例えば，d と s が縮退しているとしよう．そうすると d と s の代わりに任意のユニタリー変換した組み合わせをつくってもやはり質量の固有状態であるから，クォーク群 D は，対角位相変換 (2.11 b) より大きな変換の自由度

$$D \longrightarrow F_D D = \begin{bmatrix} U & \\ & e^{i\phi_b} \end{bmatrix} D \tag{2.14}$$

をもつ．このことによって，位相をさらに一つ減らせるので，行列 V は実行列になってしまい CP が保存するのである．

2.1.3 KM 行列のパラメター化

KM 行列の表し方はいろいろあるが，ここでは PDG[2] の基準に従い

$$V_{KM} = \begin{bmatrix} V_{ud}, & V_{us}, & V_{ub} \\ V_{cd}, & V_{cs}, & V_{cb} \\ V_{td}, & V_{ts}, & V_{tb} \end{bmatrix} \tag{2.15 a}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1c_2, & s_1c_2, & s_2e^{-i\delta} \\ -s_1c_3 - c_1s_2s_3e^{i\delta}, & c_1c_3 - s_1s_2s_3e^{i\delta}, & c_2s_3 \\ s_1s_3 - c_1s_2c_3e^{i\delta}, & -c_1s_3 - s_1s_2c_3e^{i\delta}, & c_2c_3 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \cos\theta_i, \qquad s_i = \sin\theta_i \tag{2.15 b}$$

と書くことにする．この表式の特徴は $\theta_2 = \theta_3 \to 0$ のとき，第 3 世代が分離できてカビボ回転 $(\theta_c = \theta_1)$ になること，クォーク場の適当な再定義により c_i, s_i をすべて正にできることなどである．つまり，

$$0 \leqq \theta_i \leqq \pi/2, \qquad 0 \leqq \delta \leqq 2\pi \tag{2.16}$$

としてよい．$c_2 - 1 < 10^{-5}$ であることがわかっているので (次節),

$$\begin{cases} |V_{us}| = s_1 c_2 \fallingdotseq s_1 \\ |V_{ub}| = s_2 \\ |V_{cb}| = s_3 c_2 \fallingdotseq s_3 \end{cases} \tag{2.17}$$

そこで，$s_1=\lambda$, $s_3=A\lambda^2$, $s_2 e^{-i\delta}=A\lambda^3(\rho-i\eta)$ とおく．$\lambda \ll 1$ であるので，$O(\lambda^4)$ 以上は省略すると

$$V_{KM}=\begin{bmatrix} 1-\lambda^2/2, & \lambda, & A\lambda^3(\rho-i\eta) \\ -\lambda, & 1-\lambda^2/2, & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta), & -A\lambda^2, & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

というウォルフェンシュタイン (Wolfenstein) の表式[3]となる．この表し方は，小林-益川行列がほぼ対角行列であることが明瞭に示せ，行列要素間の大小関係がよく見通せるなど，データ解析に便利である．実験値を入れると[2,4]

$$\lambda=0.2205\pm0.0018,\quad A=0.80\pm0.04,\quad \sqrt{\rho^2+\eta^2}=0.36\pm0.09 \tag{2.19}$$

となる．

2.2　小林-益川行列要素の数値評価

標準理論では CP の破れは小林-益川行列の中の虚数部分に入るようにアレンジされている．CP の破れの原因が仮に標準理論を超える新しい理論であるとしても，標準理論は少なくも真の理論の低エネルギー近似となっているはずである．それはこれまでの実験データとの比較によって裏づけられている．よって実験から標準理論を使って決められる行列の CP 保存部分（行列要素の絶対値）は，標準理論を超える新しい物理理論が出現してもそれほど変わらないと期待される．実際に提唱されているたいていのモデルではそうなっている．そこで，ここでは $N=3$ という仮定だけをして，実験値と比べて KM 行列の値を決定する[2,5]．

(1)　$|V_{ud}|$：← 原子核 β 崩壊から決められて（I-§10 参照），

$$|V_{ud}|=0.9740\pm0.0010^{6)} \tag{2.20}$$

(2)　$|V_{us}|$：← ストレンジ粒子のレプトン崩壊式（Ⅰ－§10.4.3参照）より

：Ke_3 の崩壊式

$$\Gamma(K_L{}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e) = \frac{G_F{}^2 |V_{us}|^2 f_+{}^2 m_K{}^5}{768\pi^3} f\left(\frac{m_\pi}{m_K}\right) \tag{2.21 a}$$

$$f(y) = 1 - 8y^2 + 8y^6 - y^8 - 24y^4 \ln y \tag{2.21 b}$$

より，$G_F{}^2 |V_{us}|^2 f_+{}^2$ が求められる．f_+ としては理論値[7] $[0.961 \pm 0.008(K_L{}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e),\ 0.982 \pm 0.008(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)]$ を使い

$$|V_{us}| = 0.2196 \pm 0.0023 \tag{2.22 a}$$

と決められる．このほかハイペロン崩壊から求める方法もある．

：ハイペロン崩壊からは

$$|V_{us}| = 0.222 \pm 0.003^{8)} \tag{2.22 b}$$

ハイペロンのレプトン崩壊は $SU(3)$ の破れによる不定性が大きいが，二つの平均をとって，

$$|V_{us}| = 0.2205 \pm 0.0018 \tag{2.22 c}$$

(3)　$|V_{cd}|$：← ニュートリノによるチャーム生成

ニュートリノ反応の各過程の生成断面積は，標的となるクォークの核子内存在確率と KM 行列要素の自乗に比例することを勘案すると，アイソスカラー標的の場合

$$\sigma(\nu u) \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}(\nu + d(\bar{u}) \to \mu^- + u(\bar{d})) = K|V_{ud}|^2[q(x) + \bar{q}(x)/3]$$

$$\sigma(\bar{\nu} d) \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}(\bar{\nu} + u(\bar{d}) \to \mu^+ + d(\bar{u})) = K|V_{ud}|^2[\bar{q}(x) + q(x)/3]$$

$$\sigma(\nu c) \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}(\nu + d(s) \to \mu^- + c) = K[|V_{cd}|^2 q(x) + 2|V_{cs}|^2 s(x)]$$

$$\sigma(\bar{\nu}\bar{c}) \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}(\bar{\nu} + \bar{d}(\bar{s}) \to \mu^+ + \bar{c}) = K[|V_{cd}|^2 \bar{q}(x) + 2|V_{cs}|^2 \bar{s}(x)] \tag{2.23}$$

と表せる．K は共通の係数である．チャームは $c(\bar{c}) \to l^+(l^-)$ のように決まった符号のレプトンに崩壊するから，チャーム生成の信号は 2 個の異符号のレプトンの存在によって特徴づけられる．$q(x) = u(x) + d(x)$，$\bar{q}(x)$，$s(x) = \bar{s}(x)$ は，$u, d(\bar{u}, \bar{d})$ クォーク，および s クォークの運動量分布関数である．

上式から $|V_{cd}|$ は,

$$R \equiv \frac{\sigma^{\bar{\nu}}}{\sigma^{\nu}} = \frac{\int (\bar{q}(x) + q(x)/3)\mathrm{d}x}{\int (q(x) + \bar{q}(x)/3)\mathrm{d}x} = 0.48 \pm 0.02 \tag{2.24}$$

$$\frac{|V_{cd}|^2}{|V_{ud}|^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma(\nu c)/\sigma(\nu u) - R\sigma(\bar{\nu}\bar{c})/\sigma(\bar{\nu}d)}{1-R} \tag{2.25}$$

によって求められる．データは CDHS グループと Columbia-FNAL のグループの結果[9)]を平均して,

$$B|V_{cd}|^2 = 0.49 \pm 0.05 \times 10^{-2}$$

$$B = BR(c \to l\nu x) = 0.099 \pm 0.012$$

$$\therefore \quad |V_{cd}| = 0.224 \pm 0.016 \tag{2.26}$$

(4) $|V_{cs}|$：← チャーム粒子のレプトン崩壊

チャーム粒子 D のレプトン崩壊の式は $K^0 \to \pi^+ e^- \nu$ (2.21) と同じである．$G_F V_{us} \to G_F V_{cs}$, $K_0 \to D$, $\pi^+ \to K^+$, $f_+ \to f_{+D}$ の置き換えをすればよい．

$$\Gamma(D \to \bar{K} e^+ \nu) = |f_{+D}(0)|^2 |V_{cs}|^2 (1.54 \times 10^{11}\,\mathrm{sec}^{-1})$$

$$= (0.762 \pm 0.055 \times 10^{11}\,\mathrm{sec}^{-1})^{10)}$$

から，$f_{+D}(0)$ には理論値[11)] (0.7±0.1) を使い

$$|V_{cs}| = 1.04 \pm 0.16 \tag{2.27 a}$$

と決められる．ただし，この量はユニタリティ（後述）を使えば間接的ではあるが，より精密に決めることができる．

$$|V_{cs}| = 0.978 \pm 0.004 \tag{2.27 b}$$

(5) $|V_{cb}|$：← B 粒子のレプトン崩壊

B 粒子のレプトン崩壊式は，ミューオンのレプトン崩壊式（I-§10.3 参照）から，適当な置き換えをして得られる．

$$\Gamma(b \to l\nu x) = \Gamma(b \to cl\nu) + \Gamma(b \to ul\nu)$$

$$\Gamma(b \to cl\nu) = BR(b \to cl\nu)/\tau_B$$

$$= |V_{cb}|^2 \frac{G_F{}^2 m_b{}^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_c}{m_b}\right)\left\{1 - \frac{2\alpha_s(m_b{}^2)}{3\pi} g\left(\frac{m_c}{m_b}\right)\right\}$$

$$\Gamma(b \to ul\nu) = BR(b \to ul\nu)/\tau_B$$
$$= |V_{ub}|^2 \frac{G_F{}^2 m_b{}^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_u}{m_b}\right)\left\{1 - \frac{2\alpha_s(m_b{}^2)}{3\pi} g\left(\frac{m_u}{m_b}\right)\right\} \qquad (2.28)$$

$f(y)$ は，位相空間積分からの寄与で (2.21 b) で与えられている．

実際の数値を入れると $f(m_u/m_b) \sim 1$，$f(m_c/m_b) \sim 0.48$ である．{ }の中の第 2 項は QCD による補正で，$g(m_c/m_b) \fallingdotseq 2.4$，$g(m_u/m_b) \fallingdotseq 3.61$，$\alpha_s(m_b{}^2) = 0.157 \pm 0.002$ である．分岐比は $BR(B \to l\nu x) = 0.12 \pm 0.007 \pm 0.005$ と与えられている[12]．図 2.1 は，CLEO および ARGUS グループの $B \to l\nu x$ のレプトンのエネルギースペクトルである[13]．$b \to ul\nu$, $cl\nu$, $\to c \to sl\nu$ の三つのモードが見えている．これらから

$$|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017 \qquad (2.29)^{14)}$$

(6) $|V_{ub}|$：← B のレプトン崩壊

(5) と同じデータを解析して，$b \to ul\nu$ 部分を分離抽出して，$b \to cl\nu$ と比較する．

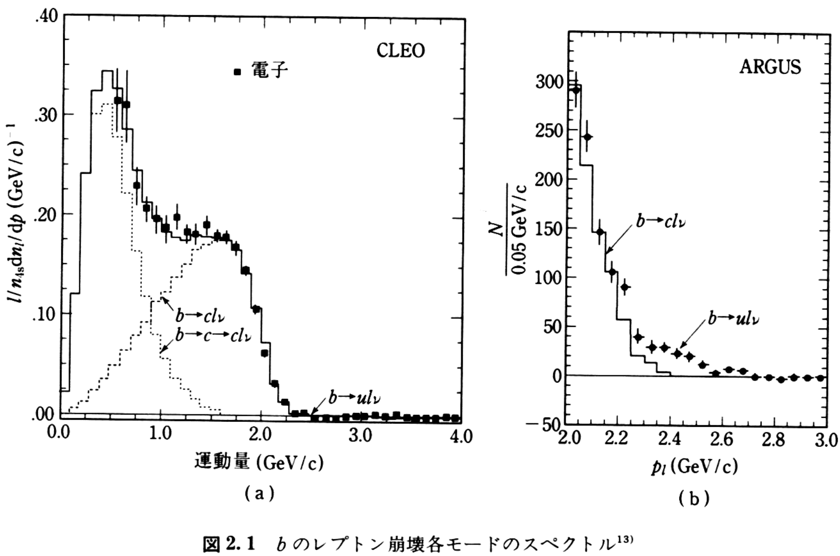


図 2.1 b のレプトン崩壊各モードのスペクトル[13]
(a) CLEO $b \to cl\nu$, $b \to c \to sl\nu$
(b) ARGUS $b \to cl\nu$, $b \to ul\nu$

$$|V_{ub}/V_{cb}|=0.08\pm 0.02 \tag{2.30 a}$$

すなわち

$$|V_{ub}|=0.0033\pm 0.0004\pm 0.0007 \tag{2.30 b}$$

ここで第1の誤差は実験から，第2の誤差はモデルの不定性からくる．

V_{tj} 成分を求めるにはトップクォークの生成または崩壊過程が必要である．現時点では実験的には求められないが，$N=3$ を仮定すればユニタリティより求めることができる[*2)]．

(7)　$|V_{tb}|$：← ユニタリティ

$$V^\dagger V=1,\ N=3 \text{ より } |V_{tb}|^2=1-|V_{ub}|^2-|V_{cb}|^2 \tag{2.31 a}$$

を使えば

$$|V_{tb}|=0.999\pm 0.0002 \tag{2.31 b}$$

(8)　$|V_{ts}|$：← ユニタリティ

$$|V_{ts}|=\frac{|V_{us}{}^* V_{ub}+V_{cs}{}^* V_{cb}|}{|V_{tb}|}$$

$V_{us}{}^*\fallingdotseq 0.221$，$V_{cs}{}^*\fallingdotseq 1$，$|V_{tb}|\fallingdotseq 1$ を使えば

$$|V_{ts}|=0.039\pm 0.005 \tag{2.32}$$

(9)　$|V_{td}|$：← ユニタリティ

$$|V_{td}|=\frac{|V_{ub}{}^* V_{ud}+V_{cb}{}^* V_{cd}|}{|V_{tb}|}$$

を使ってもできるが，$B^0d-\overline{B}^0d$ 混合から決められる $\Delta m(B_d)=0.472\pm 0.018$ ps^{-1}（後述 (2.86)）の値と

$$|\Delta m_B|\fallingdotseq 2|ReM_{12}|=\frac{G_F m_W{}^2}{6\pi^2}\eta_B B_B f_B{}^2 m_B\left(\frac{m_t{}^2}{m_W{}^2}\right)F\left(\frac{m_t{}^2}{m_W{}^2}\right)|V_{tb}V_{td}{}^*|^2$$

---

*2)　$N=3$ におけるユニタリティが成立しているかどうかは，

$$|V_{ud}|^2+|V_{us}|^2+|V_{ub}|^2=1$$

より検定できる．上記の数値を入れれば

$$(0.9740\pm 0.0010)^2+(0.2205\pm 0.0018)^2+(0.0033\pm 0.0008)^2=(0.9990\pm 0.0014)^2$$

となって，一応満たしているといってよい．

を使い，$\eta_B=0.55$，$B_B f_B{}^2=(1.4\pm0.1)(175\pm25\ \mathrm{MeV})^2$，$m_t=175\ \mathrm{GeV}$（後述(2.51)，(2.110)〜(2.112)）を入れれば

$$|V_{tb}\cdot V_{td}{}^*|=0.0084\pm0.0018 \tag{2.33}$$

を得る．

以上をまとめると各行列要素は，

$$V_{KM}=\begin{bmatrix} 0.9740\pm0.001, & 0.2205\pm0.002, & 0.0033\pm0.0008 \\ -0.224\ \ \pm0.016, & 0.978\pm0.004, & 0.040\ \ \pm0.002 \\ 0.0084\pm0.002, & 0.039\pm0.005, & 0.999\ \ \pm0.0002 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

$$\begin{cases} s_1\quad=0.220\pm0.0018 \\ s_3\quad=0.039\pm0.003 \\ s_2/s_3=0.08\pm0.02 \end{cases} \tag{2.35}$$

で δ の制限はなしということになる．V_{KM} が (3×3) 行列であることをいうには，トップ粒子の崩壊を測定して V_{tj} を決め，ユニタリティを直接証明するか，あるいは CP の破れが KM 行列の予言通りであるかを示す必要がある．

2.3　ユニタリー三角形

ユニタリティ条件によって

$$V_{ub}{}^*V_{ud}+V_{cb}{}^*V_{cd}+V_{tb}{}^*V_{td}=0 \tag{2.36 a}$$

が成立する．$V_{ud}\fallingdotseq1$，$V_{cd}\fallingdotseq-\lambda$，$V_{tb}\fallingdotseq1$ を入れると

$$V_{ub}{}^*-\lambda V_{cb}{}^*+V_{td}=0 \tag{2.36 b}$$

となる．この関係式は複素平面では図 2.2 (a) のように表すことができる．さらにウォルフェンシュタインのパラメター化で

$$V_{ub}{}^*=A\lambda^3(\rho+i\eta),\quad V_{cb}{}^*=A\lambda^2,\quad V_{td}=A\lambda^3(1-\rho-i\eta) \tag{2.37}$$

と表せるので，ユニタリー条件は，ρ-η 平面上に描くと図2.2 (b) のように，底辺の長さが 1，頂点の位置が (ρ,η) の三角形を形成することになる．底辺の両端から頂点への距離は，それぞれ，$|V_{ub}|$, $|V_{td}|$ である．各頂角を KM 行列要素で書けば

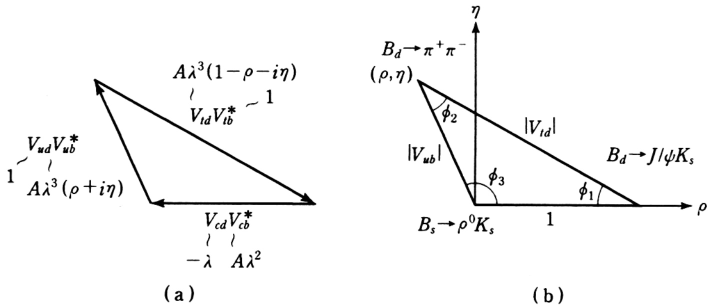


図 2.2 ユニタリー三角形

(a) 小林-益川行列のユニタリー関係：$V_{ud}V_{ub}{}^* + V_{cd}V_{cb}{}^* + V_{td}V_{tb}{}^* = 0$

(b) ウォルフェンシュタインのパラメターを使うと各辺の長さが 1, $|V_{td}|$, $|V_{ud}|$, 頂点の位置が (ρ, η) の三角形となる．頂角 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は付記した反応測定により決定できる（§2.8 参照）．

$$\phi_1 = \mathrm{Arg}\left[-\frac{V_{cd}V_{cb}{}^*}{V_{td}V_{tb}{}^*}\right] \fallingdotseq \mathrm{Arg}[-V_{td}] \tag{2.38 a}$$

$$\phi_2 = \mathrm{Arg}\left[-\frac{V_{td}V_{tb}{}^*}{V_{ud}V_{ub}{}^*}\right] \fallingdotseq \mathrm{Arg}\left[-\frac{V_{td}}{V_{ub}{}^*}\right] \tag{2.38 b}$$

$$\phi_3 = \mathrm{Arg}\left[-\frac{V_{ud}V_{ub}{}^*}{V_{cd}V_{cb}{}^*}\right] \fallingdotseq \mathrm{Arg}[V_{ub}{}^*] \tag{2.38 c}$$

と表される．標準理論での CP 問題はこのユニタリー三角形を決めることに帰着する[*3)]．

演習 2.1 この三角形の面積は $(1/2)\mathrm{Im}(V_{ud}V_{cb}V_{cd}{}^*V_{ub}{}^*)$ であること，面積は (2.11) の位相変換で不変であることを示せ．

さて，物理観測量は V_{KM} の表し方（回転角や位相のとり方）に無関係であるはずである．これは一般に次のようにいい表すことができる[15)]．

(1) 行列要素の絶対値は物理量であり，パラメターのとり方によらない．例えば $|V_{cs}|^2$, $|V_{cb}|^2$ は，$c, b \to l\nu x$ の崩壊率の中に現れ，測定できる量であ

*3) ユニタリー三角形は全部で 3 個存在し，すべて同じ面積をもつ．それぞれ異なる物理量間の関係式を表すが，(2.36 a) 以外の他の二つは辺の長さに大きな差があり，ほとんど線に近い三角形を与える．このことは，崩壊の非対称が小さいことを意味する．大きな非対称を与える物理的過程の考察に便利なのが (2.36 a) なので，ユニタリー三角形というときは通常これをさす．

る．

(2)　CP の破れの効果は，パラメーターのとり方によらずに

$$|J|=|\mathrm{Im}(V_{im}V_{jn}V_{jm}^{*}V_{in}^{*})| \tag{2.39 a}$$

に比例する．$|J|$ はユニタリー三角形の面積の 2 倍を与える量である．ただし，$i, j=u, c, t\cdots$，$m, n=d, s, b\cdots$ は $i\neq j$，$m\neq n$ という条件以外は任意である．上に採用したパラメーターで表せば，

$$|J|=c_1c_2^2c_3s_1s_2s_3\sin\delta \tag{2.39 b}$$

したがって，CP が破れるためには，どの混合角，位相も0であってはならないことがわかる．いま，$[A, B]=AB-BA$ として，(2.3) の質量行列 M^D，M^U からつくる次の量に対して

$$|\mathrm{Im}\{\det[M^DM^{D\dagger}, M^UM^{U\dagger}]\}|=|J\cdot(m_t^2-m_c^2)(m_c^2-m_u^2)(m_t^2-m_u^2)$$
$$\times(m_b^2-m_s^2)(m_s^2-m_d^2)(m_b^2-m_d^2)| \tag{2.40}$$

が証明できるので，CP 非保存が現れる条件は一つの式にまとめて

$$\mathrm{Im}\{\det[M^DM^{D\dagger}, M^UM^{U\dagger}]\}\neq 0 \tag{2.41}$$

と表すことができる[15]．CP の破れの目安 J を実験数値で見積ってみると

$$|J|=c_1c_2^2c_3s_1s_2s_3\sin\delta\sim O(\lambda^6)\lesssim 10^{-4} \tag{2.42}$$

で J のとりうる最大値 $1/(6\sqrt{3})$ に比べると非常に小さい量である．CP の破れの効果が小さいのは $|J|$ が本質的に小さいことに起因するといえる．KM 行列のパラメーター設定の方法を変えると位相は変わるが，この効果はユニタリー三角形を複素平面上で回転するのみで，形と面積は不変に保たれる．実験で測定できる量としては，例えば非対称の大きさがある．

$$\text{CP の破れの大きさ}\sim\text{非対称度}\times\text{分岐比}\sim|J|\lesssim 10^{-4} \tag{2.43}$$

と考えられる．J の大きさは過程にあまりよらない量なので，この関係式は，大きな非対称をもつ過程は分岐比が小さく，大きな分岐比をもつ過程では非対称度が小さいということを示している．

2.4　2粒子系の混合

2.4.1　質量行列と混合パラメーター ε

B 中間子での CP 非保存の議論は，KM 行列要素の違い以外は K 中間子の場合と同じ形式で進めることができる．一つの大きな特徴は，B 中間子の質量（$\sim$5 GeV）が K 中間子（$\sim$0.5 GeV）に比べて非常に大きいことである．このため位相空間体積が K 中間子に比べて非常に大きく崩壊幅が大きい．つまり B の寿命 τ_B は K の寿命 τ_K に比べて大幅に短い．また2種類の中性 B 中間子は，質量がほぼ同じで崩壊先のチャネルが数多く開けているので，崩壊幅がほとんど等しくなると考えてよい．すなわち

$$\Gamma_B \gg \Gamma_K \text{ または } \tau_B \fallingdotseq 10^{-12}\,\mathrm{sec} \ll \tau_K$$
$$\Gamma_L \fallingdotseq \Gamma_S \gg \Delta\Gamma = |\Gamma_S - \Gamma_L| \tag{2.44}$$

となる．このため，B_L と B_S を分離して，直接 $\varepsilon, \varepsilon'$ を測定することが困難であるので，現象としての取扱い方には，K と B で大きな差がでる．

$CP=\pm 1$ に対応する状態を $B_\pm$ と書くと，K 中間子と同様に

$$|B_+\rangle = p|B^0\rangle + q|\overline{B}{}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}\{(1+\varepsilon)|B^0\rangle + (1-\varepsilon)|\overline{B}{}^0\rangle\} \tag{2.45 a}$$

$$|B_-\rangle = p|B^0\rangle - q|\overline{B}{}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}\{(1+\varepsilon)|B^0\rangle - (1-\varepsilon)|\overline{B}{}^0\rangle\} \tag{2.45 b}$$

$$|p|^2 + |q|^2 = 1 \tag{2.45 c}$$

と書ける．ただし，$B_q{}^0 \equiv \overline{b}q$，$\overline{B}_q{}^0 = b\overline{q}\,(q=d, s)$ と定義する．この定義は $K^0 = d\overline{s}$，$\overline{K}{}^0 = s\overline{d}$ に合わせたものであるが，B と $\overline{B}$ を逆に定義する人もある．この ε, p, q は本来は ε_B, p_B, q_B のように B の指標をつけて，K 中間子の場合と区別すべき量であるが，混乱のおそれがないときは省略する．また

$$|\overline{B}{}^0\rangle = e^{i2\alpha} CP|B^0\rangle \tag{2.46}$$

とし，$\alpha=0$ (modulo $n\pi$) とする定義をこの章では採用する[*4]．

[*4] K や B 中間子は強い相互作用で保存する量子数 S（ストレンジネス）や B（B 量子数）をもっている．この場合，

$$|B\rangle \to |B\rangle e^{-i\alpha}, \qquad |\overline{B}\rangle \to |\overline{B}\rangle e^{+i\alpha}$$

という位相変換で運動方程式は変わらないので，位相変換の自由度がある．

B_0-$\bar{B}_0$ 系の状態を

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|B_0\rangle + \beta(t)|\bar{B}_0\rangle \tag{2.47 a}$$

と書くと，系の満たすシュレーディンガー方程式を

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12}\\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \tag{2.47 b}$$

で定義して，質量行列 $\tilde{M}_{ij}$ を導入する．

質量行列要素は $\tilde{M}_{ij}=M_{ij}-i\Gamma_{ij}/2$ と表せて，

$$M_{ij}=M_i\delta_{ij}+\langle i|H_W|j\rangle+P\sum\frac{\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle}{M_i-E_n} \tag{2.48 a}$$

$$\Gamma_{ij}=2\pi\sum\delta(M_i-E_n)\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle \tag{2.48 b}$$

である（I, II-付録 G 参照).

以下の議論では，CPT 不変性は仮定することにする．K の場合と違い，CP 固有状態のどちらが短寿命粒子（B_S と書く）でどちらが長寿命粒子（B_L と書く）か，またどちらが重いかの対応は知られていない．そこで，完全な CP 固有状態でなくても，それに近い状態を $B_\pm$ と書くことにする．$B_\pm$ の質量固有値 $\lambda_\pm$ は，固有方程式を解くことによって

$$\lambda_\pm=M_\pm-i\Gamma_\pm/2=\frac{\tilde{M}_{11}+\tilde{M}_{22}}{2}\pm\sqrt{\tilde{M}_{12}\tilde{M}_{21}} \tag{2.49}$$

と表せる．混合パラメター ε は，質量行列を使えば

$$\varepsilon=\frac{p-q}{p+q} \tag{2.50 a}$$

$$\frac{q}{p}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}=\sqrt{\frac{M_{12}{}^*-i(\Gamma_{12}{}^*/2)}{M_{12}-i(\Gamma_{12}/2)}} \tag{2.50 b}$$

のように表される．質量，幅の平均値を M, Γ と書き，差を Δm, $\Delta\Gamma$ とすると

$$M=(M_++M_-)/2, \qquad \Gamma=(\Gamma_++\Gamma_-)/2 \tag{2.51 a}$$

$$\Delta\equiv\lambda_+-\lambda_-=\Delta m-i\frac{\Delta\Gamma}{2}=2\sqrt{\tilde{M}_{12}\tilde{M}_{21}} \tag{2.51 b}$$

$$\Delta m=M_+-M_-=2\mathrm{Re}\left[\left(M_{12}-i\frac{\Gamma_{12}}{2}\right)\left(M_{12}{}^*-i\frac{\Gamma_{12}{}^*}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.51 c}$$

$$\Delta\Gamma=\Gamma_+-\Gamma_-=-4\ \mathrm{Im}\left[\left(M_{12}-i\frac{\Gamma_{12}}{2}\right)\left(M_{12}{}^*-i\frac{\Gamma_{12}{}^*}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.51 d}$$

$$\widetilde{M}_{12}=\frac{p}{2q}\Delta, \qquad \widetilde{M}_{21}=\frac{q}{2p}\Delta \tag{2.52}$$

であるので,

$$\frac{\widetilde{M}_{21}-\widetilde{M}_{12}}{2\Delta}=\frac{1}{4}\left(\frac{q}{p}-\frac{p}{q}\right)=\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \tag{2.53}$$

が成立する.

2.4.2　中性 K 中間子の CP パラメター

K 中間子崩壊における CP 非保存現象の詳細については, I-第 11 章を参照されたい. ここでは, この章の議論に必要な用語を定義するのみにとどめる. K 崩壊での CP 非保存の効果として直接実験で測定されている主なパラメターは次の三つである.

$$\eta_{+-}\equiv\frac{\langle\pi^+\pi^-|T|K_L\rangle}{\langle\pi^+\pi^-|T|K_S\rangle}=|\eta_{+-}|\exp(i\phi_{+-}) \tag{2.54 a}$$

$$\eta_{00}\equiv\frac{\langle\pi^0\pi^0|T|K_L\rangle}{\langle\pi^0\pi^0|T|K_S\rangle}=|\eta_{00}|\exp(i\phi_{00}) \tag{2.54 b}$$

$$A_L\equiv\frac{\Gamma(K_L\to e^+\nu_e\pi^-)-\Gamma(K_L\to e^-\nu_e\pi^+)}{\Gamma(K_L\to e^+\nu_e\pi^-)+\Gamma(K_L\to e^-\nu_e\pi^+)} \tag{2.54 c}$$

η などの値は世界平均をとると[2)]

$$|\eta_{+-}|=2.285\pm0.019\times10^{-3}$$
$$|\eta_{00}|=2.275\pm0.019\times10^{-3}$$
$$\phi_{+-}=43.5\pm0.6^\circ$$
$$\phi_{00}=43.4\pm1.0^\circ$$
$$\Delta\phi=\phi_{00}-\phi_{+-}=-0.1\pm0.8^\circ \tag{2.55 a}$$

なお, しばしばでてくるパラメター Δm_K などのデータをも掲げておく.

$$\Delta m_K=m_L-m_S=3.489\pm0.009\times10^{-6}\,\mathrm{eV}$$

$$\frac{\Delta m_K}{\Gamma_S}\equiv\frac{m_S-m_L}{\Gamma_S}=-0.4736\pm0.0013$$

$$\phi_{SW}\equiv\tan^{-1}\frac{2\Delta m_K}{\Gamma_S-\Gamma_L}\simeq43.49\pm0.08^\circ \tag{2.55 b}$$

次に上式を理論的に解析するときのパラメターで書き直す. $K\to2\pi$ の崩壊振幅は CPT を仮定すれば,

$$T_I=\langle 2\pi, I|T|K^0\rangle = A_I e^{i\delta_I} \tag{2.56 a}$$

$$T_I=\langle 2\pi, I|T|\bar{K}^0\rangle = A_I{}^* e^{i\delta_I} \tag{2.56 b}$$

と書ける（I，II-付録 G 参照），CP 非保存の場合は $A_I \neq A_I{}^*$ である．δ_I は最終状態でのアイソスピン $I(=0,2)$ 状態の散乱の位相のずれである．これら崩壊振幅を使い，$\varepsilon, \varepsilon'$ と関連パラメターを次式で定義する．

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{\langle I=0|T|L\rangle}{\langle I=0|T|S\rangle} = \frac{\langle 0|T|K_2\rangle + \varepsilon\langle 0|T|K_1\rangle}{\langle 0|T|K_1\rangle + \varepsilon\langle 0|T|K_2\rangle} \simeq \varepsilon + i\frac{\mathrm{Im}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_0} \tag{2.57}$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle I=2|T|L\rangle}{\langle I=0|T|S\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 2|T|K_2\rangle + \varepsilon\langle 2|T|K_1\rangle}{\langle 0|T|K_1\rangle + \varepsilon\langle 0|T|K_2\rangle} = \varepsilon' + \varepsilon_0\omega \tag{2.58}$$

$$\varepsilon' \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle I=2|T|K_2\rangle}{\langle I=0|T|K_1\rangle} - i\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\omega = i\omega\left[\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2} - \frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right] \tag{2.59}$$

$$\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 2|T|S\rangle}{\langle 0|T|S\rangle} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Re}A_2}{\mathrm{Re}A_0}e^{i(\delta_2-\delta_0)} \tag{2.60}$$

δ_I は $\pi\pi$ 散乱の位相のずれであり，$\delta_2-\delta_0 \simeq -42\pm 4°$ の値をもつ．ω は，$\Delta I=1/2$ を破る遷移の相対振幅であり，だいたい～0.03 程度の値をもつ．η_{+-}，η_{00}，A_L を $\varepsilon_0, \varepsilon'$ で表すと

$$\eta_{+-} = \frac{\varepsilon_0+\varepsilon_2}{1+\omega} \simeq \varepsilon_0 + \varepsilon', \qquad \eta_{00} = \frac{\varepsilon_0 - 2\varepsilon_2}{1-2\omega} \simeq \varepsilon_0 - 2\varepsilon' \tag{2.61}$$

$$A_L(t\to\infty) = 2\,\mathrm{Re}\varepsilon = (3.27\pm 0.12)\times 10^{-3} \tag{2.62 a}$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon) = 2.2\pm 0.3\times 10^{-3} \tag{2.62 b}$$ [16]

実験値 (2.55) を入れることにより，

$$|\eta_{+-}| \simeq |\eta_{00}|$$

$$\phi_{00} \simeq \phi_{+-} \simeq \phi_{SW} \tag{2.63}$$

となるので

$$\varepsilon_0 \simeq \eta_{+-} \simeq \eta_{00} \tag{2.64 a}$$

$$|\varepsilon'| \ll |\varepsilon_0| \tag{2.64 b}$$

が第 1 近似としていえる．

なお，後で使うので，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}$ を崩壊振幅で書き直しておく，$\Gamma_S \gg \Gamma_L$，$\Gamma_S \simeq \Gamma_{2\pi}$ であるので，Γ_{12}（式 (2.48 b)）の中間状態としては 2π を考慮すれば十分よい近似となる．位相空間体積を ρ として，(2.56) で定義された崩壊振幅 A_I を使うと，

$$\mathrm{Im}\Gamma_{12}\approx[\mathrm{Im}(\langle K^0|T|I=0\rangle\langle I=0|T|\bar{K}^0\rangle)+\{I=2\text{ の寄与}\}]\rho$$
$$=\mathrm{Im}(A_0{}^{*2}+A_2{}^{*2})\rho=-2(\mathrm{Re}A_0\mathrm{Im}A_0+\mathrm{Re}A_2\mathrm{Im}A_2)\rho \tag{2.65 a}$$
$$\Gamma_S\approx[\,|\langle I=0|T|(K^0+\bar{K}^0)/\sqrt{2}\rangle|^2+\{I=2\text{ の寄与}\}]\rho\approx 2(\mathrm{Re}A_0)^2\rho \tag{2.65 b}$$

を使えば

$$\frac{\mathrm{Im}\Gamma_{12}}{\Gamma_S}\approx-\left[\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}+\frac{\mathrm{Re}A_2\mathrm{Im}A_2}{(\mathrm{Re}A_0)^2}\right]$$
$$\approx-\left[\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}+e^{-i(\delta_2-\delta_0)}\,2\left\{-i\omega\varepsilon'+\omega^2\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right\}\right]$$

上式第2行を導くときに，(2.59)，(2.60) を使った．実験事実 ($\omega\sim0.03$, $|\varepsilon'/\varepsilon|\lesssim10^{-3}$) を使えば，右辺第2項は無視してよいことがわかる．

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{Im}\Gamma_{12}}{\Gamma_S}\approx-\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0} \tag{2.66}$$

2.4.3 B 中間子混合

CP の破れについて実験検証可能な具体例を議論する前に，CP の非保存と独立な現象ではあるが，密接な関係にある $B^0-\bar{B}^0$ 混合現象について述べよう．K 中間子の振動と同じく，$|B^0\rangle|\bar{B}^0\rangle$ を $|B_+\rangle|B_-\rangle$ で展開してから時間発展をさせ，再びもとの $|B^0\rangle|\bar{B}^0\rangle$ で書き直すと

$$|B^0(t)\rangle=\frac{1}{2p}\{|B_+\rangle\mathrm{e}^{-i\lambda_+t}+|B_-\rangle\mathrm{e}^{-i\lambda_-t}\}$$
$$=f_+(t)|B^0\rangle+(q/p)f_-(t)|\bar{B}^0\rangle \tag{2.67 a}$$
$$|\bar{B}^0(t)\rangle=\frac{1}{2q}\{|B_+\rangle\mathrm{e}^{-i\lambda_+t}-|B_-\rangle\mathrm{e}^{-i\lambda_-t}\}$$
$$=(p/q)f_-(t)|B^0\rangle+f_+(t)|\bar{B}_0\rangle \tag{2.67 b}$$

で与えられる．ただし

$$\lambda_\pm=M_\pm-i\frac{\Gamma_\pm}{2}=M-i\frac{\Gamma}{2}\pm\frac{1}{2}\left(\Delta m-i\frac{\Delta\Gamma}{2}\right) \tag{2.68}$$

$$f_\pm(t)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-i\lambda_+t}\pm\mathrm{e}^{-i\lambda_-t}] \tag{2.69}$$

ここまでは，どんな2体混合にも適用できる一般的な議論である．これから以降，B 中間子に特有な状況を考慮して式を簡略化することにする．

式 (2.51 d)，(2.48 b) から，$\Delta\Gamma$ には B と $\bar{B}$ とから共通に崩壊できる状態

のみ寄与することがわかる．それは $u\bar{q}q\bar{u}$，$u\bar{q}q\bar{c}$，$c\bar{q}q\bar{c}$（$q=d,s$）であり，すべて小林-益川行列により二重に抑圧される遷移（$\sim|V_{bq}V_{bq'}{}^*|$; q，$q'=u$ または c）ばかりであるので，全体の崩壊に占める割合は小さい．実際にも，共通チャネルの分岐比が $\sim 10^{-3}$ 程度であることが知られている[17)]．すなわち，

$$\Gamma_B \gg \Delta\Gamma_B \tag{2.70}$$

であるので（これはすでに式 (2.44) で述べたことでもある），$\Delta\Gamma=0$ とおくと

$$f_+(t)=\mathrm{e}^{-iMt-\Gamma t/2}\cos \Delta mt/2 \tag{2.71 a}$$

$$f_-(t)=-i\mathrm{e}^{-iMt-\Gamma t/2}\sin \Delta mt/2 \tag{2.71 b}$$

と書き直せる．これより，$t=0$ に B^0 であったものが，$t=t$ で，$B^0(\bar{B}^0)$ である確率は直ちに計算できて，

$$P(B^0\to B^0;t)\sim \mathrm{e}^{-\Gamma t}\cos^2\frac{\Delta m}{2}t \tag{2.72 a}$$

$$P(B^0\to \bar{B}^0;t)\sim \left|\frac{q}{p}\right|^2\mathrm{e}^{-\Gamma t}\sin^2\frac{\Delta m}{2}t \tag{2.72 b}$$

同様に

$$P(\bar{B}^0\to \bar{B}^0;t)\sim \mathrm{e}^{-\Gamma t}\cos^2\frac{\Delta m}{2}t \tag{2.72 c}$$

$$P(\bar{B}^0\to B^0;t)\sim \left|\frac{p}{q}\right|^2\mathrm{e}^{-\Gamma t}\sin^2\frac{\Delta m}{2}t \tag{2.72 d}$$

レプトン崩壊では

$$\begin{aligned} &b \longrightarrow l^-\bar{\nu}q, && \bar{b} \longrightarrow l^+\nu\bar{q} \\ &b \not\longleftrightarrow l^+\nu\bar{q}, && \bar{b} \not\longleftrightarrow l^-\bar{\nu}q \end{aligned} \tag{2.73 a}$$

ハドロン崩壊では

$$\begin{aligned} &b\to c+W^-\to s, && \bar{b}\to \bar{c}+W^+\to \bar{s} \\ &\quad\ \llcorner\!\!\longrightarrow s\bar{u} && \quad\ \llcorner\!\!\longrightarrow \bar{s}u \end{aligned} \tag{2.73 b}$$

であるから，レプトンの符号または $K^\pm$ のどちらを含むかを見ることにより，$B^0(\bar{b}q)$ または $\bar{B}^0(b\bar{q})$ 状態を区別できる．ここで，$x\equiv\Delta m/\Gamma$ として

$$\Delta mt=(\Delta m/\Gamma)\Gamma t=xt/\tau \tag{2.74}$$

と書き直すと，$B^0-\bar{B}^0$ 振動が τ_B/x を周期とすることがわかる．しかし，B 粒子は寿命が短いので（$\sim 10^{-12}$ 秒），崩壊時刻の測定には困難を伴う．崩壊点

(時間) を測定しないときは，時間で積分してやらなければならない．

$$P(B^0 \to B^0) \sim \int e^{-\Gamma t}(1+\cos\Delta mt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right) \tag{2.75 a}$$

$$P(\overline{B}^0 \to \overline{B}^0) = P(B^0 \to B^0) \tag{2.75 b}$$

$$P(B^0 \to \overline{B}^0) \sim \int e^{-\Gamma t}(1-\cos\Delta mt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left|\frac{q}{p}\right|^2\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \tag{2.75 c}$$

$$P(\overline{B}^0 \to B^0) \sim \left|\frac{p}{q}\right|^4 P(B^0 - \overline{B}^0) = \frac{1}{2}\left|\frac{p}{q}\right|^2\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \tag{2.75 d}$$

ここで，混合状態と非混合状態の比

$$r \equiv \frac{P(B^0 \to \overline{B}^0)}{P(B^0 \to B^0)} = \frac{\Gamma(B^0 \to \overline{B}^0 \to l^-)}{\Gamma(B^0 \to l^+)} = \left|\frac{q}{p}\right|^2\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right) \tag{2.76 a}$$

$$\overline{r} \equiv \frac{P(\overline{B}^0 \to B^0)}{P(\overline{B}^0 \to \overline{B}^0)} = \frac{\Gamma(\overline{B}^0 \to B^0 \to l^+)}{\Gamma(\overline{B}^0 \to l^-)} = \left|\frac{p}{q}\right|^2\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right) \tag{2.76 b}$$

を定義しておく．混合の全体に占める割合 χ

$$\chi \equiv \frac{P(B^0 \to \overline{B}^0)}{P(B^0 \to \mathrm{all})} = \frac{r}{1+r} \tag{2.77 a}$$

$$\overline{\chi} \equiv \frac{P(\overline{B}^0 \to B^0)}{P(\overline{B}^0 \to \mathrm{all})} = \frac{\overline{r}}{1+\overline{r}} \tag{2.77 b}$$

もよく使われる量である．CP 保存であれば，$r=\overline{r}$，$\chi=\overline{\chi}$ である．

2.4.4　混合パラメター x_d, x_s

最初に大きな混合量を観測したのは ARGUS グループで，その後，CLEO グループによっても確認された[18]．混合の存在の確認は

$$e^+ + e^- \to \Upsilon(4S) \to B^0\overline{B}^0 \to l_1 l_2 + X \tag{2.78}$$

の過程を調べて得られたものである．$\Upsilon(4S)$ は，$J^{PC}=1^{--}$, $M=10508$ MeV, $\Gamma=23.8$ MeV，主崩壊モードが $B_d{}^0\overline{B}_d{}^0$, B^+B^- の $b\overline{b}$ 共鳴である．混合のないときは，二つのレプトンは異符号 ($l_1 l_2 = l^+ l^-$) であるが，混合があるときは，同符号 ($l^\pm l^\pm$) のレプトン対が生成される．CP 保存を仮定すれば

$$r = \overline{r} = \frac{1}{2}(r+\overline{r}) = \frac{N(l^+l^+)+N(l^-l^-)}{2N(l^+l^-)} \tag{2.79}$$

(2.78) の $\Upsilon(4S)$ を通す反応では，B^0 と $\overline{B}^0$ は特定の量子状態にあるので，本当は相関を考慮しなければならないが，後に述べるように式 (2.76) をその

まま適用して差し支えない（式 (2.164) 参照）．$\Upsilon(4S)$ では，$B_d\overline{B}_d$ 対は生成されるが $B_s\overline{B}_s$ 対は生成されないので，ここでの測定量 $r=r_d$ である．

まず $B^0\to\overline{B}^0$ の混合の存在を確立するためには，B^0B^0 もしくは $\overline{B}^0\overline{B}^0$ が確かに生成されている事実を，崩壊生成物をすべて観測して再構築して見せるのがよい．B 崩壊は次のような連鎖崩壊を観測して同定できる．

$$
\begin{aligned}
B^0 &\longrightarrow D^{*-}+\pi^+\\
&\longrightarrow D^{*-}\rho^+\\
&\longrightarrow D^{*-}\pi^+\pi^+\pi^-\\
&\longrightarrow D^{*-}(e^+,\mu^+)\nu \qquad (2.80)\\
&\qquad D^{*-}\longrightarrow \overline{D}^0\pi^-\\
&\qquad\qquad \overline{D}^0\longrightarrow K^+\pi^-,\ K^+\pi^-\pi^0,\ K^+\pi^+\pi^-\pi^-,\ K_s{}^0\pi^+\pi^-
\end{aligned}
$$

ARGUS が実際に観測した例（図 2.3[18)]）を示す．これは，最初に観測された事象ではないが，それまでは未確認であった $b\to ul\nu$ の崩壊の存在（$V_{ub}\neq 0$）の証拠をも同時に示しているのでここに掲げた．

$$
\begin{aligned}
&\Upsilon(4S)\to \overline{B}_d{}^0+B_d{}^0 \qquad (2.81)\\
&\quad B_d{}^0\longrightarrow \overline{B}^0\\
&\qquad \overline{B}^0\longrightarrow D^{*+}\rho^-\\
&\qquad\quad \rho^-\longrightarrow \pi_\rho{}^-\pi^0\\
&\qquad\quad D^{*+}\longrightarrow \pi^+D^0\\
&\qquad\qquad D^0\longrightarrow \pi^0K^0\\
&\qquad\qquad\quad K^0\longrightarrow \pi_K{}^+\pi_K{}^-\\
&\quad \overline{B}_d{}^0\longrightarrow \pi^+\mu^-\nu
\end{aligned}
$$

下付きの ρ, K は親を区別するための指標である．

次に，r を (2.79) によって定量的に決めるためには，$B\overline{B}$ からの l^+l^+ および l^-l^- を観測しなければならない．しかし，$\Upsilon(4S)$ は $B^0\overline{B}^0$ のほかに B^+B^- へも崩壊するので，$B_d\overline{B}_d$ および B^+B^- への崩壊確率を p_0 と p_+ で表し，$b_0(b_+)$ を $B^0(B^+)$ 崩壊のレプトンモードへの分岐比とすれば，

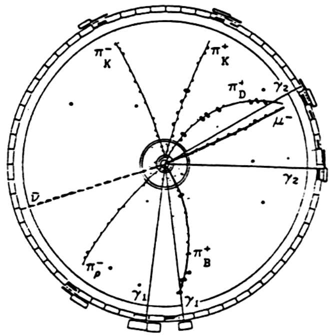


図 2.3 B^0-$\bar{B}^0$ 混合および $b\to u\mu\nu$ 反応の完全に再構築された例 (ARGUS)[18)]

$$N(l^+l^+)=N(B^0B^0)b_0^2,\quad N(l^-l^-)=N(\bar{B}^0\bar{B}^0)b_0^2$$
$$N(l^+l^-)=N(B^0\bar{B}^0)b_0^2+N(B^+B^-)b_+^2 \tag{2.82}$$

ここで,

$$\lambda\equiv\frac{p_+}{p_0}\cdot\frac{b_+^2}{b_0^2} \tag{2.83}$$

なる量を定義すれば，混合変数 r_d は観測値 N より

$$r_d=\frac{[N(l^+l^+)+N(l^-l^-)](1+\lambda)/2}{N(l^+l^-)-\lambda\{N(l^+l^+)+N(l^-l^-)\}} \tag{2.84}$$

として求められる．λ は未知量であるが理論的には1~1.3の量であり (ARGUS グループは 1.2 を採用)，かつ x_d の値は λ の値によってそれほど変わらない．

演習 2.2 (2.84) を導け．

最近の実験値は[2)],

$$r_d=0.207\pm0.012$$
$$\chi_d=0.172\pm0.010$$
$$x_d\equiv\frac{\Delta m(B_d)}{\Gamma(B_d)}=0.723\pm0.032 \tag{2.85}$$

となっている．

なお，現在では混合の時間変化も観測されており，例として図2.4にOPALによるLEPデータを示す[19)]．$B^0(\bar{B}^0)$ がそのまま崩壊すると $l^+(l^-)$ が,

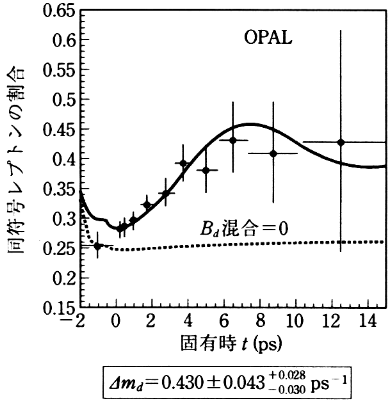


図 2.4　$e^+e^- \to B^0\overline{B}{}^0 + X$ における B 振動の時間変化．同符号のレプトン対 ($l^\pm l^\pm$) の相対生成率を固有時間の関数としてプロットしたもの[19]

$B^0 \to \overline{B}{}^0(\overline{B}{}^0 \to B^0)$ に混合すると $l^-(l^+)$ が放出されることを利用し，$e^+e^- \to B^0\overline{B}{}^0 + X$ における同符号レプトンの崩壊に占める割合をプロットしたものである．

r 値の測定や混合の時間変化を見たデータから得られる Δm_B の値を総合すると

$$\Delta m_B = |m_{B+} - m_{B-}| = 0.472 \pm 0.018 \times 10^{12} \hbar/\mathrm{sec} = 3.05 \pm 0.12 \times 10^{-4}\ \mathrm{eV} \quad (2.86)$$

となる[2]．

もし $B^0\overline{B}{}^0$ 対を生成するチャネルがたくさん開けていれば，B^0 と $\overline{B}{}^0$ は非干渉的であり独立に崩壊するので，$N(l^\pm l^\pm)$ と $N(l^+ l^-)$ の比としては，式 (2.76) の代わりに，

$$r_{BB} = \frac{\chi(1-\overline{\chi}) + \overline{\chi}(1-\chi)}{\chi\overline{\chi} + (1-\chi)(1-\overline{\chi})} = \frac{r + \overline{r}}{1 + r\overline{r}} \simeq \frac{2r}{1+r^2} \quad (2.87)$$

を使わなければならない．エネルギーが十分高くて，$B^0\overline{B}{}^0$ 生成のしきい値を十分超えているときの e^+e^- 反応 ($\sqrt{s} \gg M(\Upsilon(4S))$), LEP での $Z^0 \to B^0\overline{B}{}^0$, ハドロンコライダーでの $B\overline{B}$ 生成などはこれにあたる．はかる量は，同符号レプトンの全体に占める割合

$$\frac{N(l^+l^+) + N(l^-l^-)}{N(l^-l^+) + N(l^+l^+) + N(l^-l^-)} = \chi(1-\overline{\chi}) + \chi(1-\overline{\chi}) \quad (2.88)$$

である．$B\overline{B}$ 対を実験的に抽出するには，2ジェット現象の中で，大きな p, p_T

をもつレプトンが，それぞれのジェット内に1個ずつあるという事象を探す．しかし，$B^0\overline{B}^0$ には $B_d{}^0\overline{B}_d{}^0$ と $B_s{}^0\overline{B}_s{}^0$ があり，そのほかに $B_u\overline{B}_u(=B^+B^-)$ 生成も含まれている．これは混合しないので，χ の値を見かけ上小さくする．したがって，観測される χ の値は

$$\chi=f_d\chi_d+f_s\chi_s+(f_u\cdot 0+f_{\mathrm{other}}\cdot 0) \tag{2.89}$$

ここで，f_i は $\bar{b}q_ib\bar{q}_i$ ($i=u, d, s$ ほか) が生成される確率で，$f_u=0.397$, $f_d=0.397$, $f_s=0.10$, $f_{\mathrm{other}}=0.1$ は実験値から決められる．現時点での世界の平均値は[2)]

$$\langle\chi\rangle=0.118\pm0.006 \tag{2.90}$$

で，χ_d の値を (2.89) に入れると，これから決まる χ_s の値は 0.497 ± 0.13 となり，χ として許される上限値0.5に非常に近い．したがって χ_s については，下限値のみデータから制限がつくと解釈すべきであろう．混合の時間変化のデータを B_d, B_s 両方の寄与を入れて解析した結果からは

$$x_s=\Delta m(B_s)/\Gamma_{B_s}>14 \tag{2.91}$$

が得られている．

理論的には，4～20（後述，式 (2.123)）と推定される．このため，x_s を求めるのに，x_d を求めたのと同じ方法，つまり同符号と逆符号のレプトン数比から定める方法は適用が困難である．その理由は x-r の関数を書いてみればわかる（図2.5）．$x\gtrsim3-4$ を超えると r 値は飽和してしまい，r 値のわずか

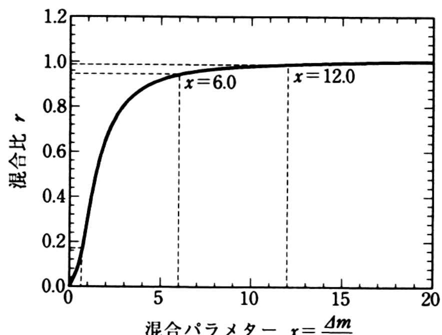


図 2.5　$x=(\Delta m/\Gamma)$ と混合比 $r=[P(B^0\to\overline{B}^0)]/[P(B^0\to B^0)]$ の関係
$x\gtrsim4\sim5$ になると混合比から決めるのは困難となる．

な誤差が x を大幅に変えてしまうのである．したがって，x_s を決めるには，直接 $B_s{}^0-\bar{B}_s{}^0$ 振動の時間依存性を測定しなければならない．測定方法に関しては後述する．

2.4.5　D^0 中間子の混合

CP の破れの議論に入る前に，混合の可能な中性中間子系のまとめをしておく．表2.1 は，$K^0, D^0, B_d{}^0, B_s{}^0$ 中間子の崩壊寿命 $\tau=1/\Gamma$，質量差，Δm，$x=\Delta m/\Gamma$，ε について，実験値もしくは理論予想値をまとめたものである．K 中間子以外は $\Delta\Gamma=|\Gamma_L-\Gamma_S|\ll\Gamma_S$ であること，$\Delta m_B\sim 100\Delta m_K$ であることがわかる．また，これから D^0-$\bar{D}^0$ 混合は小さすぎて観測がむずかしく，CP 非保存の検証には適さないことがわかる．x_D は理論的には長距離成分が大きく[20]，不定性が大きい．いずれにせよ小さい値（0.1 以下）を予想し実験的にも確かめられている．実験はフェルミ研究所のフォトンビームを使用して，$r_d=\Gamma(D^0\to\bar{D}^0\to\mu^+)/\Gamma(D^0\to\mu^-)$ を測定して，$r_D<0.00367$ (90%CL) とだしたものである[21]．

表 2.1　各種混合の度合い（括弧でくくった値は理論予想値）

	τ(sec)	$\Delta m(\hbar\text{sec}^{-1})$	$x=\Delta m/\Gamma$	ε
K^0	0.893×10^{-10}*1	0.530×10^{10}	0.474	2×10^{-3}
D^0	4.15×10^{-13}	$<2\times10^{11}$	<0.06*2 $(10^{-3}-10^{-1})$	同上
$B_d{}^0$	1.56×10^{-12}	0.47×10^{12}	0.72	(Re $\varepsilon\sim10^{-4}$)
$B_s{}^0$	同上	$(2-8)\times10^{-12}$	>14 $(4-20)$	(Re $\varepsilon\sim10^{-5}$)

*1 K_s の寿命，*2 文献 22)

2.5　質量行列の理論評価

この節では，小林-益川行列が CP の破れの原因であるとする標準理論を使えば，K 崩壊での CP 非保存データを記述できること，その効果の全容が B 粒子系を含む現象で明らかになる可能性があることを示そう．K 中間子系では $\varepsilon\gg\varepsilon'$，すなわち CP の破れの効果はもっぱら混合*5) を通して現れた．小林

-益川行列を使えば B 中間子系ではこれが逆転し，崩壊過程における CP の直接の破れが非常に大きく現れる可能性がある．その理由は，CP の破れの大きさは $\sim|J|$ で変わらないが，実験的に決める場合は，分母（崩壊率の CP 保存部分）の大きさに対する比が問題となる．K 中間子の場合はこの量が $(V_{cd}{}^* V_{cs})^2 \sim O(\lambda^2)$ に比例するのに反し，B 中間子の場合は $(V_{td}{}^* V_{tb})^2 \sim O(\lambda^6)$ であり，$|J| \sim O(\lambda^6)$ と比べて同じオーダーである．つまり最高度の非対称 $\sim O(1)$ が観測される可能性がある．もっとも非対称が大きいことは必ずしも実験的に容易であることを意味しない．B の場合は質量が大きいため Q 値が大きく，崩壊モードがたくさん存在して，チャネルあたりの分岐比が小さいからである．

2.5.1 K 中間子質量行列の評価

ここでは，これまで一般的な式として与えてきた質量行列

$$\widetilde{M}_{12} = \langle K^0|\widetilde{M}|\overline{K}^0\rangle = M_{12} - i\Gamma_{12}/2 \tag{2.92}$$

を，標準理論を使って評価する．CP 非保存の効果は，M_{12}（CP の間接の破れに寄与）と Γ_{12}（直接，間接の両方に寄与）の虚数部に現れる．標準理論では，$K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$, $B^0 \leftrightarrow \overline{B}^0$ の遷移過程は図 2.6，図 2.7 の箱型図で与えられるので，質量行列はこのファインマン図を計算することにより得られる．箱型図を中間で二つに切断したものが崩壊過程を与えるので，崩壊率と箱型図振幅は（他の崩壊過程が寄与しなければ）比例関係にある．しかし，崩壊振幅は質量殻上にあるという条件がつくので，図中の $i, j = t$ クォークは箱型図には寄与しても崩壊図には寄与しない．K 崩壊のときは c クォークも寄与しない．この結果箱型図を二つに切った崩壊図のみでは，V_{td} もしくは V_{ub} を入れることができない．そのため，理論的に崩壊過程の中に CP 非保存効果を入れるには，図 2.6 (e)，図 2.7 (e) のようなペンギン図を考慮に入れなければならない．

a. Δm

K 崩壊の質量行列は，図 2.6 (a) (b) の箱型図形を計算すればよい．その結果は[23]，

---

*5) 混合効果を CP の間接的な破れ，CP の違う状態に混合を通さず直接崩壊する過程を CP の直接的な破れともいう．

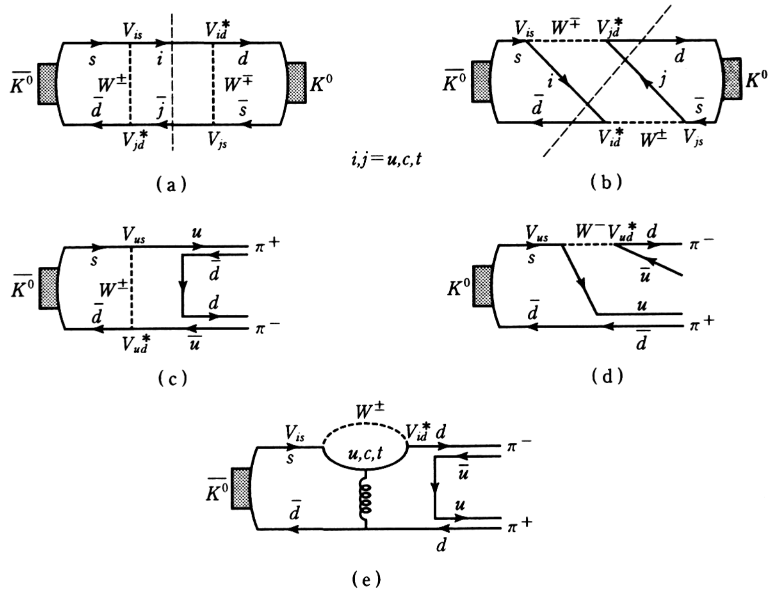


図 2.6　$K^0-\overline{K^0}$ 系で CP の破れを生む過程
(a), (b)　箱型図. $i, j=t$ のとき CP の破れ ε を生じる.
(c), (d)　CP を保存する崩壊振幅
(e)　ペンギン図, t クォークを中間状態に含む図が CP の破れ ε' を生じる.

$$M_{12}=-\frac{G_F{}^2 m_W{}^2}{12\pi^2} m_K (B_K f_K{}^2)[\eta_1\lambda_c{}^2 x_c F(x_c)+\eta_2\lambda_t{}^2 x_t F(x_t)+2\eta_3\lambda_c\lambda_t G(x_c, x_t)]$$

$$\lambda_i = V_{id}{}^* V_{is}, \qquad x_i = m_i{}^2/m_W{}^2 \tag{2.93}$$

$F(x)$, $G(x)$ はループ計算から現れる量であり,

$$F(x)=\left[1-\frac{3(x+x^2)}{4(1-x)^2}-\frac{3x^2\ln x}{2(1-x)^3}\right]\sim 1 \quad (x\lesssim 1 \text{ のとき}) \tag{2.94 a}$$

$F(x)$ は, x の緩やかな関数で, $F(0)=1$, $F(4)\sim 0.57$, $F(\infty)=1/4$ である.

$$G(x, y)=xy\left[\left\{1-\frac{3x^2}{4(1-x)^2}\right\}\frac{\ln x}{x-y}-\frac{3}{8(1-x)(1-y)}+(x\leftrightarrow y)\right]$$

で $x\ll 1$, $x\ll y$ のときは

$$\sim x\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{3y}{4(1-y)}\left\{1+\frac{y}{1-y}\ln y\right\}\right] \tag{2.94 b}$$

となる. η($\eta_1\simeq 0.85$, $\eta_2\simeq 0.61$, $\eta_3\simeq 0.36$) は QCD 補正[24], f_K(＝160 MeV) は

$K \to \mu\nu$ の崩壊定数である.

B_K は次式で定義される．中間状態を真空で置き換えたとき，$B_K=1$ となるように定義されている[25,26].

$$(4/3)B_K f_K{}^2 m_K{}^2 = \langle K^0 | \bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma^5)s\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma^5)s|\bar{K}^0\rangle \tag{2.95}$$

B_K は QCD の非摂動効果による因子であり，理論的不定性が大きい.

最近の値は

$$B_K = 0.75 \pm 0.15 \tag{2.96}$$

である[20].

式 (2.93) を眺めればわかるように，各中間状態の寄与は中間状態の質量の自乗に比例し，また中間状態と外の中間子を結びつける小林-益川行列要素 $\lambda_q{}^2$ に比例する．したがって，小林-益川行列の寄与で抑圧されなければ，本来は一番重い t クォークの寄与がきくはずである．B 中間子の場合は確かにそうなっているが，K 中間子の場合は，外のクォークが s, d であるために t クォークの質量による因子より小林-益川行列による因子

$$\lambda_c{}^2 \sim \lambda^2, \quad \lambda_t{}^2 \sim A^4\lambda^{10}(1-\rho-i\eta)^2, \quad \lambda_c\lambda_t \sim A^2\lambda^6(1-\rho-i\eta)$$

がきき，チャームクォークの寄与が優勢となる．t の寄与は小さな補正として入るのみである．Γ_{12} に関しても同様であり，この結果質量行列の位相は，$\lambda_c{}^2 = (V_{cd}{}^* V_{cs})^2$ が支配することになる．したがって

$$\mathrm{Re}\, M_{12} \gg \mathrm{Im}\, M_{12}, \qquad \mathrm{Re}\, \Gamma_{12} \gg \mathrm{Im}\, \Gamma_{12} \tag{2.97}$$

が成立する．このことは (2.50)，(2.51) を参照すれば，

$$q/p \simeq 1-2\,\varepsilon, \qquad |\varepsilon| \ll 1 \tag{2.98}$$

$$\Delta m_K = -\Delta m \fallingdotseq -2\,\mathrm{Re}\, M_{12}, \qquad \Delta\Gamma \fallingdotseq \Gamma_S \fallingdotseq 2\,\mathrm{Re}\, \Gamma_{12} \tag{2.99}$$

を意味する.

箱型図以外の寄与をも取り入れたときの質量行列の実部は，$K_1{}^0, K_2{}^0$ の質量差 Δm_K と

$$\Delta m_K(1-D) = -2\,\mathrm{Re}\, M_{12} \tag{2.100}$$

の関係にある．$D(=0\sim0.5)$ は箱型図形以外の過程の寄与を表し長距離効果と呼ばれる（箱型図の寄与は短距離効果と呼ばれる）．理論的に評価のむずかしい部分であり，以下の議論では無視する．$G_F = 1.166\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$，$m_W = 81\,\mathrm{GeV}$，$\Delta m_K = 3.5\times10^{-15}\,\mathrm{GeV}$ などを使うと，精度よく決められる部分は

$$C_K \equiv \frac{6\pi^2 \Delta m_K}{G_F{}^2 f_K{}^2 m_K m_W{}^2} = 1.8\times 10^{-5} \tag{2.101}$$

という形に書ける．具体的に Δm_K を書き下ろすと，$m_c{}^2 \ll m_t{}^2, m_W{}^2$ の近似で

$$|\Delta m_K| = -2\,\mathrm{Re}M_{12} \simeq \frac{G_F{}^2 m_c{}^2}{6\pi^2} m_K B_K f_K{}^2 \eta_1 (V_{cd}{}^* V_{cs})^2 \tag{2.102}$$

となる．最初にこの箱型図形の寄与を検討したときは，まだチャーム粒子が発見されておらず，Δm_K の実験値を再現するという条件から m_c をだいたい 1.5 GeV と推察したのであった[26]．

b．ε と ε' の評価

CP 非保存の効果は 2 世代だけでは入らないことは，すでに述べたとおりであり，t クォークの中間状態（λ_t を含む項）を考慮する必要がある．t クォーク中間状態の寄与は，Δm の絶対値にはあまりきかないが，虚数部したがって混合パラメター ε への寄与を与えるので，CP の議論には欠かせない．CP 非保存のもう一つのパラメター ε' (2.59) は，崩壊振幅の中の CP 非保存部分である．箱型振幅を中間で切れば崩壊振幅となるが（図 2.6 (c), (d)），終状態が質量殻上にあるという条件から，c, t クォークの寄与はない．すなわち，この崩壊振幅に含まれる KM 行列は，$V_{us} V_{ud}{}^*$ のみであり，振幅の実数部にのみ寄与し CP 非保存項は存在しない．崩壊行列要素に CP 非保存項を含めるには，t クォークの寄与が含められるように，図 2.6 (e) のようないわゆるペンギン図を考慮する必要がある．ここでは，$d \to t$ 遷移が中間状態として含まれるので，CP の非保存効果が V_{td} を通じて入るのである．なお，質量行列の Γ_{12} 部分は，K^0 および $\overline{K}^0$ の共通終状態への崩壊振幅の積であるから，崩壊振幅の CP 非保存成分は，$\mathrm{Im}\,\Gamma_{12}$ として ε へも寄与する．

K 崩壊の振幅パラメター ε_0 は，混合パラメター ε と，

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + i\,\mathrm{Im}\,A_0/\mathrm{Re}\,A_0$$

で関係づけられていて (2.57)，近似的に

$$\varepsilon_0 \doteqdot \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{Im}\,M_{12}}{\Delta m_K} + \frac{\mathrm{Im}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_0}\right) \tag{2.103}$$

と書くことができる（(2.66) と $\sin\phi_{SW} \simeq 1/\sqrt{2}$ を使え）．なお，ε_0 と ε はしばしば混同して使用される．通常，差は小さいので不都合が生じることはないが，ε_0 は測定できる物理量であるのに反し，ε は位相変換で変わる量であるこ

とに留意しておく必要がある*6). 以下は, K 崩壊での ε は ε_0 のことを意味するものとする.

ε' は,

$$\varepsilon' = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 \omega = i\omega\left(\frac{\mathrm{Im}\, A_2}{\mathrm{Re}\, A_2} - \frac{\mathrm{Im}\, A_0}{\mathrm{Re}\, A_0}\right) \tag{2.104}$$

$$\omega = \frac{e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Re}\, A_2}{\mathrm{Re}\, A_0} \tag{2.105}$$

と表される〔(2.59), (2.60)〕. δ_I は $\pi\pi$ 散乱の位相のずれであり, $|\omega| \fallingdotseq 0.03$ は, $\Delta I = 1/2$ 則を破る度合いである. ε' への寄与はペンギン図からくるが, ペンギン図は $\Delta I = 1/2$ 遷移過程であるので A_2 への寄与はなく, アイソスピン 0 の振幅 A_0 の虚数部に寄与する. A_0 の実部への主寄与は, 図 2.6 (c), (d) で表されるトリー図である. KM 行列要素を取り出した後のペンギン図とトリー図の振幅を A_p, A_t と書くと

$$\frac{\mathrm{Im}\, A_0}{\mathrm{Re}\, A_0} \sim \frac{\mathrm{Im}(V_{ts} V_{td}{}^*)}{\mathrm{Re}(V_{us} V_{ud}{}^*)} \frac{A_p}{A_t} \sim \frac{\lambda^5 \eta}{\lambda} \frac{A_p}{A_t} \sim \text{a few} \times 10^{-4} \frac{A_p}{A_t} \tag{2.106}$$

となる. ペンギン図は QCD 部分を含み評価が困難であるが, $|A_p/A_t| \lesssim O(1)$ と見積もられている. $|\varepsilon| \sim 2 \times 10^{-3}$ を考慮すると, ε の中の $\mathrm{Im}\, A_0$ の寄与は小さいと考えられる. すなわち, $\mathrm{Im}\, \Gamma_{12} \ll \mathrm{Im}\, M_{12}$ が成立する. 実験的には (2.104), (2.105) に $\mathrm{Im}\, A_2 = 0$ を入れて得られる式に, $\omega \simeq 0.03$, $|\varepsilon'/\varepsilon| \fallingdotseq 2.2 \times 10^{-3}$ を入れると

$$\left|\frac{\mathrm{Im}\, A_0}{\varepsilon \mathrm{Re}\, A_0}\right| \sim \left|\frac{\varepsilon'}{\omega \varepsilon}\right| < 0.1 \tag{2.107}$$

となり, 理論的予想と合っている.

---

*6) (2.46) を使って, $|K^0\rangle \to \exp(-i\alpha)|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle \to \exp(i\alpha)|\bar{K}^0\rangle$ と再定義すると,

$$A_I \to A_I e^{-i\alpha}, \qquad \bar{A}_I \to \bar{A}_I e^{i\alpha},$$

$$(M_{12}, \Gamma_{12}) \to (M_{12}, \Gamma_{12}) e^{2i\alpha}, \qquad \frac{q}{p} \to \frac{q}{p} e^{-2i\alpha}$$

であるので, α を微小量としたとき,

$$\mathrm{Re} A_I \to \mathrm{Re} A_I + \alpha \mathrm{Im} A_I, \qquad \mathrm{Im} A_I \to \mathrm{Im} A_I - \alpha \mathrm{Re} A_I$$

$$\mathrm{Im} M_{12} \to \mathrm{Im} M_{12} + 2\alpha \mathrm{Re} M_{12}, \qquad \mathrm{Im} \Gamma_{12} \to \mathrm{Im} \Gamma_{12} + 2\alpha \mathrm{Re} \Gamma_{12}$$

$$\varepsilon \to \varepsilon + i\alpha$$

と変化する. ε_0 や ε' はこの変換で変わらない. α を適当に選べば上記変数のどれか一つは 0 にできる. この自由度を利用して, $\mathrm{Im} A_0 = 0$ とするのが, Wu-Yang の手法である. このとき, アイソスピン 0 状態への崩壊振幅パラメター ε_0 は, 混合パラメター ε と同一となる. この章で現れる計算式は, $\alpha = 0$ という条件で計算されているから, ε や ε' の式の中の $\mathrm{Im} A_0 / \mathrm{Re} A_0 \neq 0$ である.

箱型図およびペンギン図の計算結果を実際に入れ，ウォルフェンシュタインのパラメターを使うと[20,27]，

$$|\varepsilon|=3.1\times10^{-3}A^2\eta B_K\left[1+8A^2(1-\rho)\left(\frac{m_t}{175\,\mathrm{GeV}}\right)^2\right] \tag{2.108}$$

$$|\varepsilon'/\varepsilon|\fallingdotseq1.1\times10^{-2}\eta\left(\frac{150\,\mathrm{MeV}}{m_s}\right)^2\frac{10^{-12}\,\mathrm{sec}}{\tau_B}$$
$$\fallingdotseq(0.81\pm0.27)\times10^{-2}A^2\eta \tag{2.109}$$

と表すことができる．実験データは標準理論の予想範囲内に入っている．

2.5.2　B 中間子質量行列の評価

a．$\varDelta m$

$M_{12}=\langle B^0|\widetilde{M}|\overline{B}^0\rangle$ であるから，行列要素は K 中間子と同じく図 2.7 (a), (b) の箱型図形から計算できるので，(2.93) とまったく同じ形となる．ただし，今度は t クォーク中間状態の寄与が圧倒的に大きい $(m_t\gg m_c,\ m_u)$ ので，M_{12} は

$$M_{12}=-\frac{G_F{}^2}{12\pi^2}m_W{}^2\eta_{\mathrm{QCD}}B_Bf_B{}^2m_B\lambda_t{}^2x_tF(x_t) \tag{2.110}$$

と書ける．式の中に現れる量は，$K\to B$ とする以外はまったく同様に定義される．

$$\lambda_i=V_{ib}V_{iq}{}^*\begin{cases}i=u,\,c,\,t\\ q=d,\,s\end{cases}$$
$$m_B=5279.8\pm1.6\,\mathrm{MeV}$$
$$\eta_{\mathrm{QCD}}\simeq0.55^{28)} \tag{2.111}$$

f_B は B の崩壊定数であるが，f_K と違って実験的に未定である．QCD や格子ゲージ理論計算では[5]

$$B_{B_d}f_{B_d}{}^2=(1.4+0.1)(175\pm25\,\mathrm{MeV})^2 \tag{2.112}$$

b．$\varDelta\Gamma$

Γ_{12} には終状態が質量殻上にあるという条件がつくから，図 2.7 の箱型図形を破線で切ったところのエネルギー値が m_B に等しくなければならない．したがって，t 状態は寄与せず u および c のみが寄与する．計算によれば[22]

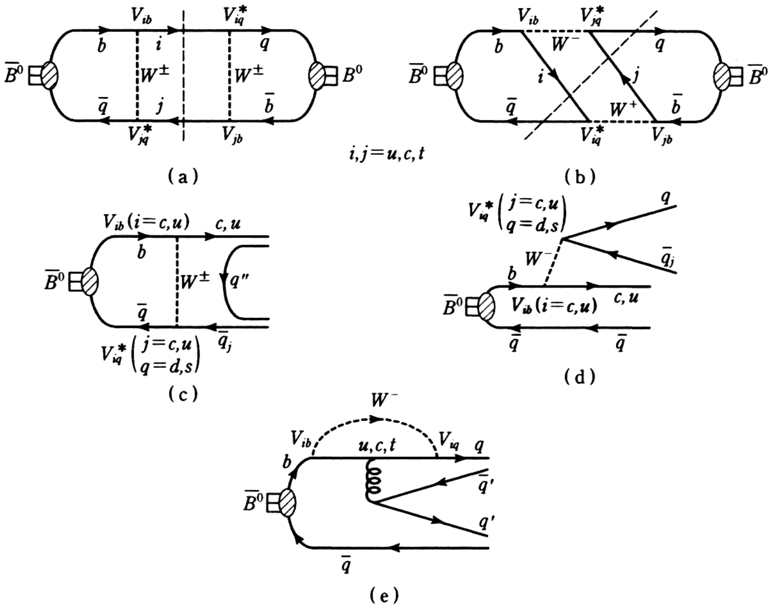


図 2.7 B 中間子系の CP の破れに寄与する過程

(a), (b) 箱型図

(c), (d) Γ_{12} に寄与する図. (a), (b) を切断して得られるが, 質量殻上という条件から $i, j=u, c$ である.

(e) ペンギン図

$$\Gamma_{12}=\frac{G_F{}^2}{8\pi}B_B f_B{}^2 m_B m_b{}^2[\lambda_c{}^2 p_{cc}+\lambda_u{}^2 p_{uu}+2\lambda_u\lambda_c p_{cu}] \tag{2.113}$$

$$p_{ij}=\left[\left(1-\frac{(m_i+m_j)^2}{m_b{}^2}\right)\left(1-\frac{(m_i-m_j)^2}{m_b{}^2}\right)\right]^{1/2}\left[1-\frac{1}{3}\frac{m_i{}^2+m_j{}^2}{m_b{}^2}-\frac{2}{3}\frac{(m_i{}^2-m_j{}^2)^2}{m_b{}^4}\right] \tag{2.114 a}$$

$m_u{}^2 \ll m_c{}^2 \ll m_b{}^2$ の近似で,

$$p_{uu}\sim 1, \quad p_{uc}\sim 1-\frac{4m_c{}^2}{3m_b{}^2}, \quad p_{cc}\sim 1-\frac{8m_c{}^2}{3m_b{}^2} \tag{2.114 b}$$

であるので, これを代入すると

$$\Gamma_{12}=\frac{G_F{}^2}{8\pi}B_B f_B{}^2 m_B m_b{}^2\left[\left(\lambda_c+\lambda_u\right)^2-(\lambda_u+\lambda_c)\lambda_c\frac{8m_c{}^2}{3m_b{}^2}\right]$$

ユニタリティ条件

$$\lambda_u+\lambda_c+\lambda_t=0 \tag{2.115}$$

を入れると

$$\Gamma_{12}=\frac{G_F{}^2}{8\pi}B_Bf_B{}^2m_Bm_b{}^2\left[\lambda_t{}^2+\frac{8}{3}\lambda_t\lambda_c\frac{m_c{}^2}{m_b{}^2}\right] \tag{2.116}$$

$$\therefore\quad \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\fallingdotseq-\frac{3\pi m_b{}^2}{2m_t{}^2}\frac{1}{F(x_t)}\left(1+\frac{8}{3}\frac{\lambda_c m_c{}^2}{\lambda_t m_b{}^2}\right) \tag{2.117}$$

第1項は $|\Gamma_{12}/M_{12}|$ を与え，第2項は $\mathrm{Im}(\Gamma_{12}/M_{12})$ に寄与する．第1項≫第2項であるので，M_{12} と Γ_{12} はほとんど同じ位相角をもつ．もし完全に同じ位相角をもつとすれば，(2.50) を見ればわかるように，q/p は純粋な位相になり，ε_B は純虚数となる．この場合 $|\overline{B}^0\rangle$ の位相角を適当に選べば，q/p は1に等しくできるから $\varepsilon_B=0$ となり，混合によるCPの破れは存在しない．ε_B の虚数部は位相の再定義で変化するので観測量ではなく，$\mathrm{Re}\,\varepsilon_B$ のみが物理的意味をもつ．したがって，CPの破れが小さいとき，小さくなる方法としては2通りあることがわかる．$\mathrm{Im}M_{12}$, $\mathrm{Im}\Gamma_{12}$ がともに小さくて $|\varepsilon|$ が小さいか，または，M_{12} と Γ_{12} がほぼ同じ位相をもって，ε が純虚数に近くなるかである．われわれの採用した小林-益川行列のパラメター形式による位相のとり方では，前者が K で実現し，後者が B で実現するのである．後者の場合 (2.51) より，

$$\therefore\quad \Delta m\fallingdotseq 2|M_{12}|,\qquad \Delta\Gamma\fallingdotseq 2|\Gamma_{12}| \tag{2.118}$$

さて，$\Delta\Gamma_B\ll\Gamma_B$ と実験データ (2.85) ($x_d=\Delta m_B/\Gamma_B=0.723\pm0.032$) を使えば，

$$\left|\frac{\Delta\Gamma_B}{\Delta m_B}\right|\fallingdotseq\left|\frac{\Delta\Gamma_B}{\Gamma_B}\right|\frac{1}{x}\ll 1 \tag{2.119}$$

がモデルによらずに成立しなければならないが，(2.118)，(2.117) より，

$$\left|\frac{\Delta\Gamma_B}{\Delta m_B}\right|\fallingdotseq\left|\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right|\fallingdotseq\frac{m_b{}^2}{m_t{}^2}\sim 0.001 \tag{2.120}$$

であり，KMモデルは実験データに矛盾しない．歴史的には x_d が～1程度の大きな値をもつとわかった時点で，トップクォークの質量が予想外に大きい ($m_t\gg m_b$) ということが認識されたのである．

c．x_d, x_s の評価

x は Δm と Γ の比であるから，Δm の表式 (2.118)，(2.110) を使えば

$$x_q=\frac{\Delta m_{Bq}}{\Gamma_{Bq}}=\tau_{Bq}\frac{G_F{}^2m_W{}^2}{6\pi^2}\eta_{\mathrm{QCD}}B_Bf_B{}^2m_B|V_{tb}V_{tq}{}^*|^2x_tF(x_t) \tag{2.121}$$

q は d または s の意味である．この式は B_d と B_s に共通であり，$\tau_{Bd} \sim \tau_{Bs} = \tau_b$ とおくと，

$$(\sqrt{B}_B f_B)_{Bd} \sim (\sqrt{B}_B f_B)_{Bs} \tag{2.122}$$

[5]

であると考えられるので

$$\frac{x_s}{x_d} \sim \frac{|V_{ts}|^2}{|V_{td}|^2} = \frac{1}{\lambda^2\{(1-\rho)^2+\eta^2\}} \sim 4-20 \tag{2.123}$$

となり，実験値 (2.91) とは矛盾しない．

上式からわかるように，x_s は CP の破れを表す変数ではないが，ユニタリー三角形の頂点の位置を $\rho=1$ からの半円周上に固定することがわかる．また，$|V_{ub}|$ は原点に中心をもつ半径 $(\rho^2+\eta^2)^{1/2}$ の円を与える．したがって，x_s と $b \to ul\nu$ の崩壊率を精密に測定すれば，ユニタリー三角形の頂点が決まるので，CP の破れが非対称実験で直接検出されなくも，間接的に決められる．その意味で，x_s および $b \to ul\nu$ の精密測定は CP の破れの測定と同様に重要である．

2.6 ユニタリー三角形の許容範囲

これまでに考察した知識を使って，ユニタリー三角形の許容範囲を評価してみよう[29,30]．まず，(2.30 a) の $|V_{ub}/V_{cb}|=0.08\pm0.02$ は，ρ-η 平面で一つの円を与える．

$$(\rho^2+\eta^2)^{1/2}=0.36\pm0.04 \tag{2.124}$$

次に，(2.108) より，B_K の値 (2.96) を入れて

$$|\varepsilon| \simeq 1.69\times10^{-2}A^4\eta(1-\rho)\left(\frac{m_t}{175\,\mathrm{GeV}}\right)^2 \tag{2.125}$$

なので，$|\varepsilon|$ は ρ-η 平面上で双曲線を与えることになる．また，(2.109)

$$|\varepsilon'/\varepsilon|=(0.81\pm0.27)\times10^{-2}A^2\eta \tag{2.126}$$

によって，η に対してある幅の値を与える．

B_d-$\overline{B}_d$ 混合 (2.121) は，

$$A[(1-\rho)^2+\eta^2]=1.65\pm0.45 \tag{2.127}$$

という形に書けるので，$\rho=1$，$\eta=0$ を中心とする円を与える．

したがって，上記四つの条件から，実験誤差内で ρ-η の許容範囲が決まる．図2.8に，これまでの実験値と理論最良推定値を使って許されるユニタリティ三角形の許容範囲（黒影部分）を示す[2]．ただし，この解析から得られる制限はあまり強くはない．あくまでも目安と考えるべきである．理論的誤差が大きく，例えば B_d-$\bar{B}_d$ 混合では，$f_B=175\pm25$ MeV，$|\varepsilon|$ では，$B_K=0.75\pm0.15$ 程度の不定性がある．

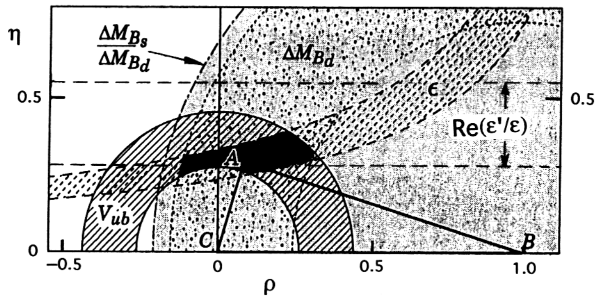


図 2.8　小林-益川行列とユニタリティ
図はCPの破れをKM行列で表すとき，種々の実験から制限される ρ, η の値．影をつけて囲んだ領域内が許される．

2.7　*K* の 稀 崩 壊

CP非保存パラメターを決めるに適する過程は，このほかにいろいろあるが，比較的近未来に検証が期待される過程として，K の稀崩壊反応をあげておこう．

a．$K_L \to \pi^0 e\bar{e}$

CP保存が成立しているときは，CPが正の $K_1{}^0$ は，1フォトン中間状態を通して $\pi^0 e\bar{e}$ に崩壊できる（γ1 崩壊）．CPが負の $K_2{}^0$ は，2個のフォトン放出を通してのみ $\pi^0 e\bar{e}$ に崩壊できるので（γ2 崩壊），振幅は相対的に α 程度小さい．CPの破れがあると，K_L の中に ε だけある $K_1{}^0$ 成分から γ1 過程を通して崩壊できるので，CPの間接的破れによる崩壊は，CP保存過程の $K_2{}^0$ 成分の γ2 崩壊より大きいと期待される．$K_L \to \pi^0\gamma\gamma$ の実験値を取り入れてCP保存

成分を評価した結果は，分岐比が 10^{-12} より小さいとしている[31]．$K_1{}^0 \to \pi^0 e\bar{e}$ の崩壊振幅は，$K^+ \to \pi^+ e\bar{e}$ 崩壊と結びついており，$K^+ \to \pi^+ e\bar{e}$ の実験データと理論値の比較から

$$BR(K_L \to \pi^0 e\bar{e})_{\text{indirect CP}}$$
$$= |\varepsilon|^2[\tau(K_L)/\tau(K_S)]B(K_S \to \pi^0 ee) < 1.6\times10^{-12} \qquad (2.128)$$

がいえる．$K_2{}^0$ 成分が直接的 CP の破れにより崩壊する分岐比は

$$BR(K_L \to \pi^0 e\bar{e})_{\text{direct}} \fallingdotseq 6.7\times10^{-11}A^4\eta^2$$
$$\sim 2-4\times10^{-12} \qquad (2.129)$$

と評価されている[32]ので，$K_L \to \pi^0 e\bar{e}$ 崩壊から直接の CP の破れ効果を検出できる可能性がある．現在の実験値は

$$BR(K_L \to \pi^0 e\bar{e})_{\text{exp}} < 4.3\times10^{-9}\ (90\%\text{CL}) \qquad (2.130)$$

である[33]．

b．$K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}$

この過程には，いわゆる長距離相互作用効果がなく，図 2.9 に表されるような箱型の寄与が主であり，理論的な不定性が小さいという特徴があり，KM 行列要素に対して独立の実験情報を与える．計算式は，$K^+ \to \pi^0 e\nu$ の式との比をとり理論的不定性を軽減したもので[34]，

$$B(K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}) = \frac{\alpha^2 B(K^+ \to \pi^0 \mathrm{e}\nu)}{V_{us}{}^2 2\pi^2 \sin^4\theta_W} \sum_{l=e,\mu,\tau} |V_{cs}{}^* V_{cd} X^l{}_{NL} + V_{ts}{}^* V_{td} F(x_t)|^2$$
$$\simeq 1.0\times10^{-10}A^4[\eta^2 + (\rho-\rho_0)^2] \qquad (2.131\text{ a})$$

$$\rho_0 \simeq 1.4 \qquad (2.131\text{ b})$$

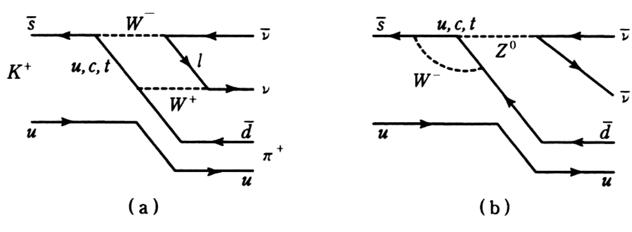


図 2.9 $K^+ \to \pi^+\nu\nu$ 過程に寄与するグラフ

$X^t{}_{NL}$ と $F(x_t)$ はループ計算に使う量である．崩壊分岐比の理論推定値は $\sim 10^{-10}$ である．$K^+ \to \pi^+ \nu \bar{\nu}$ モードのデータは，ρ-η 平面で，$\rho_0 \fallingdotseq 1.4$ を中心とする円を与える．

実験的には反応例を一事象見つけたとしている[35)]．分岐比を計算してみると $BR = 4.2^{+9.7}_{-3.5} \times 10^{-10}$ を与えるので，理論予想値と矛盾はしないが，確定的な議論をするにはもう1桁ほど感度を上げる必要がある．

c．$\boldsymbol{K_L{}^0 \to \pi^0 \nu \bar{\nu}}$

CPが保存していれば存在しない崩壊モードである．したがって，一例でも，この反応を確認できれば，CPの破れが $\Delta S = 1$ の崩壊に存在することの証拠となる．$K_L{}^0 \to \pi^0 \nu \bar{\nu}$ 崩壊振幅は，$K^+ \to \pi^+ \nu \bar{\nu}$ 崩壊振幅とアイソスピンによって関係づけられている．

$$A(K_L \to \pi^0 \nu \bar{\nu}) = (1/2)[(1+\varepsilon)A(K^+ \to \pi^+ \nu \bar{\nu}) - (1+\varepsilon)A(K^- \to \pi^- \nu \bar{\nu})] \tag{2.132}$$

CPの間接の破れすなわち混合効果による分岐比は $\sim 10^{-15}$ と見積もられており[36)]，直接の破れ効果による分岐比[37)]

$$BR(K_L \to \pi^0 \nu \bar{\nu}) \fallingdotseq 0.41 \times 10^{-9} A^4 \eta^2 \tag{2.133}$$

の方が圧倒的に大きいので，CPの直接の破れを検証するのに最適の反応であるが，困難な実験であるので理論との比較が可能になるには，まだしばらく時間がかかるであろう．現在の上限値は 5.9×10^{-7} である[38)]．

2.8　*B* 崩壊での CP 非保存の観測法

2.8.1　レプトン非対称

CPの破れは，非対称

$$A_f \equiv \frac{\Gamma(B \to f) - \Gamma(\bar{B} \to \bar{f})}{\Gamma(B \to f) + \Gamma(\bar{B} \to \bar{f})} \tag{2.134}$$

を検出することによりその存在が検証できる．

f をレプトンとすれば，(2.75)，(2.76) を参照して，

$$\frac{N(l^-l^-)-N(l^+l^+)}{N(l^-l^-)+N(l^+l^+)}=\frac{r-\bar{r}}{r+\bar{r}}=\frac{\left|\frac{q}{p}\right|^2-\left|\frac{p}{q}\right|^2}{\left|\frac{q}{p}\right|^2+\left|\frac{p}{q}\right|^2}\fallingdotseq -4\,\mathrm{Re}\varepsilon_B \tag{2.135}$$

また (2.50) と (2.120) から

$$\left|\frac{q}{p}\right|^2=\left|\frac{1-\varepsilon_B}{1+\varepsilon_B}\right|^2\fallingdotseq 1-4\,\mathrm{Re}\varepsilon_B\fallingdotseq 1-\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right) \tag{2.136}$$

これより (2.117) を参照して

$$\mathrm{Re}\varepsilon_B\fallingdotseq\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\fallingdotseq-\frac{\pi m_c{}^2}{m_t{}^2F(x_t)}\mathrm{Im}\left(\frac{V_{cb}V_{cq}{}^*}{V_{tb}V_{tq}{}^*}\right)$$

$$\fallingdotseq\begin{cases}O(10^{-4}) & B_d\\ O(10^{-5}) & B_s\end{cases} \tag{2.137 a}$$ [39]

で，K 中間子の場合の ε より 1 桁は小さいと予想される．B 中間子の寿命が短くかつ B_L と B_s を分離することはほとんど不可能なので，K 中間子の場合と違って ε_B を直接測定するのは困難である．しかし CP の破れの原因が質量行列にのみある場合，つまり超弱 (super weak interaction) 理論である場合は，CP 非保存の検証にはこうした ε 効果を直接見られる反応は重要である．実験値

$$\mathrm{Re}\ \varepsilon_B=0.002\pm0.007\pm0.003 \tag{2.137 b}$$ [2]

は理論予想値と矛盾しない．

2.8.2　CP の直接の破れ

CP の破れが KM 行列起因である場合は，CP の直接の破れ，すなわち崩壊反応において CP が保存しない可能性があるので実験の選択肢は大きく増す．CPT が保存しかつ終状態 f を特定した場合の崩壊振幅は，

$$A(B\to f)=\sum_i D_i e^{i\delta_{Si}}=\sum_i |D_i|e^{i\phi_{Wi}}e^{i\delta_{Si}} \tag{2.138 a}$$

$$A(\bar{B}\to \bar{f})=\sum_i D_i{}^* e^{i\delta_{Si}}=\sum_i |D_i|e^{-i\phi_{Wi}}e^{i\delta_{Si}} \tag{2.138 b}$$

と書ける (I , II-付録G19)．ここに，i は異なる中間状態を示し，ϕ_W は弱い相互作用振幅の位相，δ_S は終状態粒子の強い相互作用による散乱の位相のずれである．CP の直接の破れがあるときは $D_i\neq D_i{}^*$ である．実験検証に必要な条件

$$\delta\Gamma=\Gamma(B\to f)-\Gamma(\bar{B}\to\bar{f})\neq 0 \tag{2.139}$$

満たすためには，干渉効果の存在が必要であり，このためには少なくも2種類の干渉振幅が必要である．

$$\begin{aligned}A(B\to f)&=|D_1|e^{i\phi_{W1}}e^{i\delta_{S1}}+|D_2|e^{i\phi_{W2}}e^{i\delta_{S2}}\\ A(\bar{B}\to\bar{f})&=|D_1|e^{-i\phi_{W1}}e^{i\delta_{S1}}+|D_2|e^{-i\phi_{W2}}e^{i\delta_{S2}}\end{aligned} \tag{2.140}$$

とすれば，

$$\Gamma(B\to f)-\Gamma(\bar{B}\to\bar{f})=|D_1D_2|\sin(\delta_{W1}-\delta_{W2})\sin(\delta_{S1}-\delta_{S2}) \tag{2.141}$$

である．上記の式からわかるように，CPの直接の破れを見るためには，2種の振幅の弱い相互作用の位相，散乱の位相ともに異なっていなければならない．中性 K 粒子の崩壊の場合の $\pi\pi$ 終状態には，$I=0,2$ の2種類の振幅があり，この条件を満たしていた．一方，$K^{\pm}\to\pi^{\pm}\pi^0$ では，終状態に $I=2$ 状態しか存在せず，CP非保存効果は見ることができない．B の場合は荷電粒子崩壊でも，例えば，$B^-\to K^-\rho^0$ のように，W の交換によるトリー型振幅とペンギン型振幅をともにもち，かつ終状態が2種類以上の振幅に分解できるときは，CP非保存効果が原理的には観察可能である．しかし，位相差 $(\delta_{W1}-\delta_{W2})$ を知るために，少なくも2個の未知量 $|D_1/D_2|$ と $(\delta_{S1}-\delta_{S2})$ の知識が必要であり，一般的に考えて分離は容易ではない．

ここで，中性 B 粒子のときは混合効果により，$A(B\to f)$ と $A(B\to\bar{B}\to f)$ の干渉が生じることに注目する．特に終状態の f と $\bar{f}$ としてCPの固有状態

$$CP|f\rangle=|\bar{f}\rangle=\pm|f\rangle \tag{2.142}$$

を選ぶと，ただ1種類の振幅が寄与する場合でも弱い相互作用の位相が取り出せることを示そう[40]．

(2.67 a, b) から，終状態 f，および $\bar{f}$ への崩壊幅を計算すると

$$\Gamma(B^0\to f)=|A(f)|^2\frac{e^{-\Gamma t}}{2}\times[(1+|\beta|^2)+(1-|\beta|^2)\cos\Delta mt+2\,\mathrm{Im}(\beta)\sin\Delta mt] \tag{2.143 a}$$

$$\Gamma(\bar{B}^0\to\bar{f})=|\bar{A}(\bar{f})|^2\frac{e^{-\Gamma t}}{2}\times[(1+|\bar{\beta}|^2)+(1-|\bar{\beta}|^2)\cos\Delta mt+2\,\mathrm{Im}(\bar{\beta})\sin\Delta mt] \tag{2.143 b}$$

ただし,

$$A(f)=\langle f|T|B^0\rangle,\qquad \bar{A}(\bar{f})=\langle \bar{f}|T|\bar{B}^0\rangle \tag{2.144}$$

であり, $\beta, \bar{\beta}$ は次のように定義される[*7].

$$\beta=\frac{q}{p}\frac{\langle f|T|\bar{B}^0\rangle}{\langle f|T|B^0\rangle}=\frac{q}{p}\bar{\rho}_f,\qquad \bar{\beta}=\frac{p}{q}\frac{\langle \bar{f}|T|B^0\rangle}{\langle \bar{f}|T|\bar{B}^0\rangle}=\frac{p}{q}\rho_{\bar{f}} \tag{2.145}$$

ここで, ただ一種の散乱振幅が寄与しかつ終状態 $f, \bar{f}$ が CP の固有状態であるとしよう. この条件を満たすとき, $\bar{\rho}_f, \rho_{\bar{f}}$ はともに純粋な位相であり,

$$\bar{\rho}_f=\eta_F e^{-2i\phi_W},\qquad \rho_{\bar{f}}=\eta_F e^{+2i\phi_W} \tag{2.146}$$

と書き直せる. $\eta_F=\pm$ は $|f\rangle$ の CP 固有値である.

q/p については, (2.136) より, 絶対値がほとんど 1 で純粋な位相に近いことが保証されている. いまは非対称が十分大きいという状況を考察しているのであるから $|q/p|=1$ とおいてよい. すなわち, q/p もまた純粋な位相であるので, その位相を $-2\phi_M$ と書けば, (2.50) と (2.110) から

$$\frac{q}{p}\equiv e^{-i2\phi_M}\doteqdot\left(\frac{M_{12}{}^*}{M_{12}}\right)^{1/2}\doteqdot\frac{V_{tb}{}^*V_{tq}}{V_{tb}V_{tq}{}^*}\doteqdot\begin{cases} V_{td}/V_{td}{}^* & : B_d \text{ の場合} \\ 1 & : B_s \text{ の場合}\end{cases} \tag{2.147}$$

したがって

$$\beta=\eta_F e^{-2i(\phi_M+\phi_W)}\equiv\eta_F e^{-2i\phi},\qquad \bar{\beta}=\eta_F e^{2i\phi} \tag{2.148}$$

となり, (2.143) に入れれば

$$\Gamma(B^0\to f)\sim e^{-\Gamma t}(1-\eta_F\sin 2\phi\sin\Delta mt) \tag{2.149 a}$$

$$\Gamma(\bar{B}^0\to \bar{f})\sim e^{-\Gamma t}(1+\eta_F\sin 2\phi\sin\Delta mt) \tag{2.149 b}$$

したがって非対称パラメターは

$$A_f(t)=\frac{\Gamma(B^0\to f;t)-\Gamma(\bar{B}^0\to \bar{f};t)}{\Gamma(B^0\to f;t)+\Gamma(\bar{B}^0\to \bar{f};t)}=-\eta_F\sin 2\phi\sin\Delta mt \tag{2.150}$$

時間変化を見ない場合は, 積分した量の比をとり

$$A_f=-\eta_F\left[\frac{x}{1+x^2}\right]\sin 2\phi \tag{2.151}$$

すなわち, 考察中の非対称パラメターには, 強い相互作用による不定性がなく, 最大 $x/(1+x^2)$;(B_d の場合~0.47) くらいまでの値が可能である.

念のために繰り返すが, (2.147) の q/p の位相は KM 行列として (2.15)

---

*7)　$|p/q|\neq1$ が間接な破れ, $|\bar{A}/A|\neq1$ が直接の破れといわれるのに対し, $\mathrm{Im}\,\beta\neq0$ は混合と崩壊の干渉による破れといわれる.

を採用したことから生じた特殊事情である．q/p の位相は $|\overline{B}^0\rangle$ の位相の再定義で吸収できるので，それ自身は観測量ではないが，$\bar{\rho}_f$ を掛けたものは位相変換で不変で ((2.103) の脚注を参照)，観測可能な物理量なのである．

なお，非対称の時間変化が正弦関数であることは一般的な議論からいえる．CP＝T であるから，CP の破れは時間の奇関数でなければならない．これに反し混合は CP 非保存には関係しないので余弦関数となるのである．

2.8.3　崩壊モードと KM 行列の位相

中性 B の混合を利用して調べられる物理量 ϕ は，$\beta=(q/p)\cdot\bar{\rho}_f$ の位相であり，質量行列にある効果 (q/p) と崩壊振幅にある効果 $\bar{\rho}_f$ を組み合わせたものである．種々の反応を観測することによって，ユニタリー三角形の頂角が独立に決められる．CP の破れを見る反応として，$B_d{}^0\to J/\psi+K_S$ の反応を考えよう．この反応に優勢に効くファインマン図を図 2.10 (a) に示す．

この図から明らかなように崩壊過程は $b\to c$ 遷移であり，振幅は $V_{cb}V_{cs}{}^*$ を含む．したがって，$\bar{\rho}_f$ は $(V_{cb}V_{cs}{}^*/V_{cb}{}^*V_{cs})$ に比例する．KM 行列のウォルフェンシュタイン表示 (2.18) の $O(\lambda^3)$ までの近似をとる限り，この $\bar{\rho}_f$ は位相を含まないが，q/p が $V_{td}/V_{td}{}^*$ を含むので，$B_d\to J/\psi+K_S$ における非対称の中の位相角 ϕ は，

$$B_d\to J/\psi\cdot K_S:\phi=\phi_1=\phi_M,\qquad \phi_M=\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Arg}\left[\frac{V_{td}}{V_{td}{}^*}\right]\tag{2.152}$$

から決められる．この場合の位相 ϕ は，混合パラメター (q/p) の位相である．ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 は図 2.2 で定義したユニタリー三角形の頂角である．

次に，$B_d\to\pi^+\pi^-$ 反応 (図 2.10 (c)) を見てみよう．この過程は $b\to u$ の遷移で，$(V_{ub}V_{ud}{}^*/V_{ub}{}^*V_{ud})\sim(V_{ub}/V_{ub}{}^*)$ を含むので

$$B_d\to\pi^+\pi^-:\phi=\pi-\phi_2=\phi_M+\gamma,\qquad \gamma=\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Arg}\left[\frac{V_{ub}}{V_{ub}{}^*}\right]\tag{2.153}$$

この場合の位相角 ϕ は混合パラメターの位相角 ϕ_M と崩壊振幅の位相角 ϕ_W の両方の和である．同様に $B_S\to\rho^0+K_S$, $B_S\to J/\psi+\phi$ 反応での CP 非保存の位相はそれぞれ，

$$B_S\to\rho^0K_S\qquad:\phi=\phi_3\tag{2.154}$$

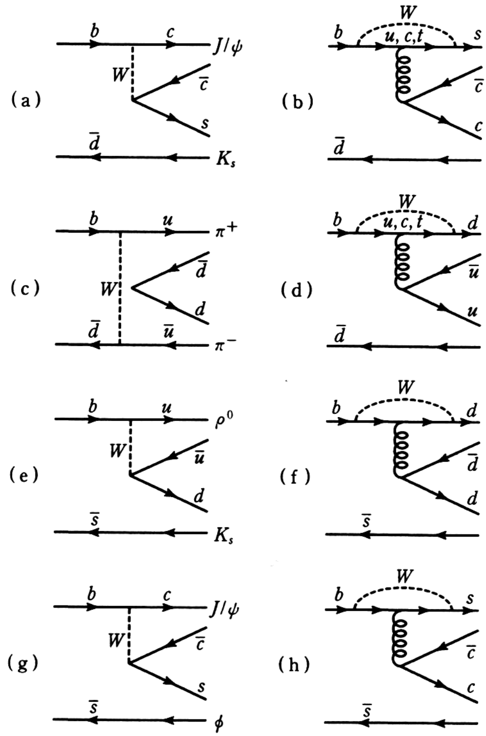


図 2.10 CP の破れによる非対称と KM 位相を決めるのに有用な過程，右側は左側と同じ崩壊モードを与えるペンギン図

(a)，(b) $\overline{B}_d \to J/\psi + K_s$
Arg(V_{td}/V_{td}^*) が測れる．

(c)，(d) $\overline{B}_d \to \pi^+ + \pi^-$
Arg$(V_{td}V_{ub}/V_{td}^*V_{ub}^*)$ が測れる．

(e)，(f) $\overline{B}_s \to \rho + K_s$
Arg(V_{ub}/V_{ub}^*) が測れる．

(g)，(h) $\overline{B}_s \to J/\psi + \phi$
Arg$(V_{ts}V_{cb}/V_{ts}^*V_{cb}^*) = 0$ が測れる．

$$B_s \to J/\psi \cdot \phi \qquad : \phi = 0 \tag{2.155}$$

となる．この最後の過程では CP の破れによる非対称は存在しないが，それは CP の破れを KM 行列に求めたことから生じたことであり，KM 行列の正当性を立証するには，この過程での非対称の欠如は他の過程の非対称の検出に劣らず重要である．表 2.2 にこれら四つの反応をまとめる．これらの反応で非対称パラメターを決定することが可能ならば，ユニタリー三角形の頂角をすべて

表 2.2 CP の破れを見る反応例

分類	親	崩壊過程	終状態	$-\sin 2\phi$	CP	その他
1	B_d	$b \to c$	$J/\psi \cdot K_s$	$\mathrm{Im}(V_{td}/V_{td}^*)$	−	$\phi_1 = \phi_M$
2	B_d	$b \to u$	$\pi^+\pi^-$	$\mathrm{Im}[V_{td}/V_{td}^*)(V_{ub}/V_{ub}^*)]$	+	$\phi_2 = \phi_M + \gamma$
3	B_s	$b \to u$	$\rho^0 \cdot K_s$	$\mathrm{Im}(V_{ub}/V_{ub}^*)$	−	$\phi_3 = \gamma$
4	B_s	$b \to c$	$J/\psi \cdot \phi$	$0 \quad (O(\lambda^2))$	～＋	$\phi_4 = 0$

決められるので，単にCPの破れのみならずKM行列の全容を知ることが可能である．

雑音過程　話を混乱させないために，上の考察ではある特定の振幅（図2.10の左側に掲げた崩壊のトリー図）のみがきくとした．もちろん，世の中はそれほど簡単ではない．上記の崩壊過程図に対応して，強い相互作用を含む振幅が存在する．そのうち最も簡単なものはペンギン図であり，図2.10の右側に掲げる．主過程のトリー型崩壊振幅を A_T，ペンギン図の振幅を A_P とし，それぞれの位相を α_T, α_P とすると，非対称 A は，

$$\sim |A_P/A_T| \sin(\alpha_T - \alpha_P) \tag{2.156}$$

程度の変更を受ける．ペンギン図の中間状態には，u, c, t がきくが，u, c の場合は運動量遷移が m_b 程度であり，KM行列以外の力学過程に

$$\sim \frac{\alpha_s(m_b)}{12\pi} \ln\left(\frac{m_W{}^2}{m_b{}^2}\right) \tag{2.157}$$

に比例するほぼ同じだけの寄与を与える[41]．ユニタリティにより

$$V_{ub}V_{uq}{}^* + V_{cb}V_{cq}{}^* = -V_{tb}V_{tq}{}^* \tag{2.158}$$

であるから，u, c 中間状態の振幅和は t 中間状態振幅と同じ位相をもつ．すなわち A_P の位相は t クォークで決まることになる．

$b \to sc\bar{c}$ 崩壊（$B_d \to J/\psi + K_S$, $B_s \to J/\psi + \phi$）の場合は，

$$\left.\begin{array}{l} A_T \sim V_{cb}V_{cs}{}^* \sim A\lambda^2 \\ A_P \sim V_{tb}V_{ts}{}^* \sim A\lambda^2 \end{array}\right. \longrightarrow \alpha_T - \alpha_P = 0$$

$b \to du\bar{u}$ 崩壊（$B_d \to \pi^+\pi^-$, $B_s \to \rho^0 K_S$）の場合は，

$$\left.\begin{array}{l} A_T \sim V_{ub}V_{ud}{}^* \sim \lambda^3 \exp(-i\gamma) \\ A_P \sim V_{tb}V_{td}{}^* \sim \lambda^3 \exp(-i\phi_M) \end{array}\right. \longrightarrow \alpha_T - \alpha_P \neq 0$$

であり，$b \to sc\bar{c}$ の場合は，上に示すようにトリー崩壊図とペンギン図の位相が同じなので，影響は小さく非対称の変更量は小さいと期待される．しかし，$b \to du\bar{u}$ の場合は，位相が異なるので，ペンギン図過程のトリー崩壊過程に対する相対的大きさによっては，非対称が大きく変更される可能性がある．

ペンギン図の大きさは，グルーオン交換により（2.157）の抑圧因子がかかるので，単純に考えればトリー崩壊図に比べて小さいと考えられるが，裸の

クォーク図と実際に観測されるメソン過程の関係は正確に評価することがむずかしい．モデルによっては，$|A_P/A_T|\sim 1$ と見積もられる場合がある．実際の計算によれば，$B_d\to J/\psi+K_S$ では非対称量の変更は小さく数%以下であるが，$B_d\to\pi^+\pi^-$ は，最高20%の変更を受けるとされている[42]．ただし，この場合でもアイソスピン解析を行うことにより，すなわち，$B^\pm\to\pi^\pm\pi^0$, $B^0(\overline{B}^0)\to\pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$ の6種の崩壊率を測定比較することにより，ペンギン図を分離することができる[43]．

2.9 非対称 B ファクトリー

2.9.1 x_s の 測 定

a. 2体の相関

これまでは論理の筋道を明らかにするため，親の B^0, $\overline{B}^0$ 状態はわかっているとして話を進めてきた．しかし実際の実験条件では，B^0 と $\overline{B}^0$ はともに生産され，B^0 からも $\overline{B}^0$ からも崩壊可能なモードの非対称を測定するときは親の状態を同定する必要がある．レプトン崩壊モードは崩壊状態を同定するだけで親の区別も同時に自動的にできるが，崩壊状態としてCPの固有状態を観測するときは，親の同定が欠かせない．したがって，$B\overline{B}$ の対生成の一方を B または $\overline{B}$ と同定した上で他方の崩壊を測定する．e^+e^- 衝突型加速器で実験を行うときは，$\Upsilon(4S)$（スピン0の中間子 $B^0\overline{B}^0$ が $L=1$ の状態）や $\Upsilon(5S)$（スピン 0^- と 1^- の中間子 $B\overline{B}^*$ が $L=1$ の状態）を通すと，軌道角運動量状態を確定できるのでクリーンな実験が可能となる．e^+e^- 反応ではほとんどが1光子状態を経由するので，$C=P=-$, $CP=+$ 状態にある．したがって2粒子 $B^0\overline{B}^0$ の状態は，軌道角運動量 L が偶または奇によって，

$$|\psi\rangle=|B^0\overline{B}^0\rangle+CP|B^0\overline{B}^0\rangle=|B^0\overline{B}^0\rangle\pm|\overline{B}^0B^0\rangle \tag{2.159 a}$$

そこで，粒子1(2) が時刻 $t_1(t_2)$ に量子状態 $k_1(k_2)$ にある波動関数を

$$|\psi(t_1,t_2)\rangle=|B^0;k_1,t_1\rangle|\overline{B}^0;k_2,t_2\rangle\pm|\overline{B}^0;k_1,t_1\rangle|B^0;k_2,t_2\rangle \tag{2.159 b}$$

とする．ただし $|B^0;t\rangle$, $|\overline{B}^0;t\rangle$ は (2.67) で与えられている．

いま，時刻 t_1 に，粒子1が量子状態 k_1 で B^0 として崩壊したとすると（これは $\langle g|T|B^0\rangle\neq 0$, $\langle g|T|\overline{B}^0\rangle=0$ のような終状態を選ぶこと，例えば l^+ が観

測されることを意味する．このとき終状態が $\bar{g}$ であれば，$\bar{B}^0$ として観測されたことになる)．

$$\langle g(t_1)|\psi(t_1,t_2)\rangle=\langle g|T|B^0\rangle \times[f_+(t_1)|\bar{B}^0;k_2,t_2\rangle\pm(p/q)f_-(t_1)|B^0;k_2,t_2\rangle] \tag{2.160}$$

さらに第2の粒子が，時刻 t_2 に量子状態 k_2 で $\bar{B}^0$ として崩壊したとすると

$$\langle g(t_1)\bar{g}(t_2)|\psi(t_1,t_2)\rangle=\langle g|T|B^0\rangle\langle \bar{g}|T|\bar{B}\rangle F_\pm(t_1,t_2)$$

$$F_\pm(t_1,t_2)=[f_+(t_1)f_+(t_2)\pm f_-(t_1)f_-(t_2)] =e^{-iM(t_1+t_2)}e^{-(\Gamma/2)(t_1+t_2)}\cos\frac{\Delta m}{2}(t_1\pm t_2) \tag{2.161 a}$$

第2の粒子が，時刻 t_2 に量子状態 k_2 で B^0 として崩壊したとすると

$$\langle g(t_1)g(t_2)|\psi(t_1,t_2)\rangle=\langle g|T|B^0\rangle^2(p/q)G_\pm(t_1,t_2)$$

$$G_\pm(t_1,t_2)=[f_+(t_1)f_-(t_2)\pm f_-(t_1)f_+(t_2)] =\mp ie^{-iM(t_1+t_2)}e^{-(\Gamma/2)(t_1+t_2)}\sin\frac{\Delta m}{2}(t_1\pm t_2) \tag{2.161 b}$$

同様に

$$\langle \bar{g}(t_1)g(t_2)|\psi(t_1,t_2)\rangle=\langle g(t_1)\bar{g}(t_2)|\psi(t_1,t_2)\rangle \tag{2.161 c}$$

$$\langle \bar{g}(t_1)\bar{g}(t_2)|\psi(t_1,t_2)\rangle=\langle \bar{g}|T|\bar{B}\rangle^2(q/p)G_\pm(t_1,t_2) \tag{2.161 d}$$

$B^0\bar{B}^0$ 状態を終状態のレプトンで同定することにして，$g=l^+\nu h$, $\bar{g}=l^-\bar{\nu}\bar{h}$ と書けば

$$dN(l^+l^-)=dN(l^-l^+)\sim e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\{1+\cos\Delta m(t_1\pm t_2)\}$$

$$dN(l^+l^+)\sim\left|\frac{p}{q}\right|^2e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\{1-\cos\Delta m(t_1\pm t_2)\}$$

$$dN(l^-l^-)\sim\left|\frac{q}{p}\right|^2e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\{1-\cos\Delta m(t_1\pm t_2)\} \tag{2.162}$$

時間変化を見ないときは，積分をする必要があるので，

$$\int dt_1dt_2e^{-\Gamma(t_1+t_2)}\cos\Delta m(t_1\pm t_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma^2}\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & (2.163\text{ a})\\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma^2}\dfrac{1}{(1+x^2)} & (2.163\text{ b})\end{cases}$$

を考慮すると，

$$r=\frac{N(l^+l^+)+N(l^-l^-)}{N(l^\pm l^\mp)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\left|\dfrac{p}{q}\right|^2+\left|\dfrac{q}{p}\right|^2\right)\dfrac{3x^2+x^4}{2+x^2+x^4} & L=\text{偶数}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\left|\dfrac{p}{q}\right|^2+\left|\dfrac{q}{p}\right|^2\right)\dfrac{x^2}{2+x^2} & L=\text{奇数}\end{cases} \tag{2.164}$$

となり，L=奇数の場合の逆符号レプトン数比は2体の相関を考慮しないときの式 (2.76) と一致する．$\Upsilon(4S)$ は $L=1$ であるから，1体の式をそのまま使ってよかった理由はここにある．この一致は偶然ではなく，B 中間子のボース統計から導かれる．L=奇数であれば2体の波動関数は反対称であるから B^0B^0, $\overline{B}^0\overline{B}^0$ 状態は存在しえない．したがって，時刻 t_1 に粒子1が，B^0 と認定されると，粒子2は $\overline{B}^0$ でしかありえない．したがってこの後に B^0 に崩壊する確率は1粒子状態の $\overline{B}^0\to B^0$ の確率と同じである．

なおこれは2粒子を十分離れた2点で独立に B^0 または $\overline{B}^0$ と同定したときに，相関が存在するはずがない（$c\Delta t<\Delta x$ ならば因果律が効かない）というアインシュタイン-ローゼン-ポドルスキパラドックスに対する一つの反例となっている．

b. 実験条件

さて前（§2.4.4）に述べたように $x\gtrsim3\sim4$ のときは r 値を測って x を決める方法が適用できない．$x_s\sim4\sim20$ と予想されているわけであるから B_s-$\overline{B}_s$ 振動の混合定数 x_s を決めるには実際に (2.162) の時間変化を見て x_s を決めてやらなければならない．e^+e^- 反応で $B^0\overline{B}^0$ を生成する場合，衝突点はわからないので，B^0 の崩壊時刻 t_1 と $\overline{B}^0$ の崩壊時刻 t_2 を独立には決められず，時間差 $|t_1-t_2|$（実際には二つの崩壊点間の距離）のみが測定可能である．したがって (2.162) を t_1+t_2 については積分すると，$\mathrm{d}N(l^\pm l^\pm)$ は，

$$\frac{\mathrm{e}^{-\Gamma|\Delta t|}}{1+x^2}\left[2\sin^2\frac{x\Delta t}{2\tau}+x^2+x\sin x\frac{|\Delta t|}{\tau}\right]\quad L=\text{偶数} \tag{2.165 a}$$

$$\mathrm{e}^{-\Gamma|\Delta t|}\cdot2\sin^2\frac{x\Delta t}{2\tau}\quad L=\text{奇数} \tag{2.165 b}$$

のように時間変化する．ただし

$$\Delta mt=\frac{\Delta m}{\Gamma}\Gamma t=x\frac{t}{\tau} \tag{2.166}$$

を使った．測定時間の分解能 σ_t が，$\sigma_t\ll(\tau/x)$ を満たしていれば，時間変化

による振動が測定できる．対称 e^+e^- 衝突型加速器 $(E_{e+}=E_{e-})$ による $e^+e^- \to \Upsilon(4S)$ からの平均崩壊長 l は

$$\langle l\rangle = c\beta\gamma\tau \fallingdotseq 30\mu m \tag{2.167}$$

と非常に短いので，B 中間子が発生点（e^+e^- の衝突点）からビームの外へ出る前に崩壊する．したがって，崩壊点は，崩壊生成物の軌跡をビームパイプの外で測定し外挿しなければならず，十分な分解能を得るのが困難である．そこで非対称 e^+e^- 衝突型加速器（$E_{e+}\gg$ または $\ll E_{e-}$，例えば 2 GeV×14.8 GeV）を使えば，$B\overline{B}$ は相当の速度をもって生成されるからローレンツ因子 $\beta\gamma$ が大きくなり，$\langle l\rangle \fallingdotseq 380\mu$m となる．崩壊点再現の空間分解能として 40$\mu$m を想定すると，$x_s=\sim$8-10 くらいまでは測定可能であろうと予想される．図 2.11 に，$x_s=10$ としたとき，予想誤差を含む実験条件を入れ，モンテカルロシミュレーションしたときどのように見えるかを示す[44]．

2.9.2 CP 非対称の測定

CP の破れをハドロンの CP 固有状態 f への崩壊の非対称から測定する場合を考えよう．粒子 1 が時刻 t_1 に状態 g に崩壊して B^0 と同定され，時刻 t_2 に f に崩壊したとすると，(2.160) を参照して

$$\begin{aligned}
&\langle g(t_1)f(t_2)|\psi\rangle \\
&\quad=\langle g|T|B^0\rangle\langle f|T|B^0\rangle[f_+(t_1)\{f_+(t_2)\,\bar{\rho}_f+(p/q)f_-(t_2)\} \\
&\qquad\pm(p/q)f_-(t_1)\{f_+(t_2)+(q/p)\,\bar{\rho}_f f_-(t_2)\}] \\
&\quad=\langle g|T|B^0\rangle\langle f|T|B^0\rangle(p/q)[\beta F_\pm(t_1,\,t_2)+G_\pm(t_1,\,t_2)]
\end{aligned} \tag{2.168 a}$$

ここで，± の符号は，軌道角運動量 $L=$even$(+)$, odd$(-)$ に対応する．また粒子 1 が時刻 t_1 に $\overline{B}^0$ として同定され，時刻 t_2 に f に崩壊したとすると，

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{g}(t_1)f(t_2)|\psi\rangle \\
&\quad=\langle \bar{g}|T|\overline{B}^0\rangle\langle f|T|B^0\rangle\left[\frac{q}{p}f_-(t_1)\{f_+(t_2)\,\bar{\rho}_f+(p/q)f_-(t_2)\}\right. \\
&\qquad\left.\pm f_+(t_1)\{f_+(t_2)+(q/p)\,\bar{\rho}_f f_-(t_2)\}\right] \\
&\quad=\pm\langle \bar{g}|T|\overline{B}^0\rangle\langle f|T|B^0\rangle[F_\pm(t_1,\,t_2)+\beta G_\pm(t_1,\,t_2)]
\end{aligned} \tag{2.168 b}$$

これから，(2.161) を参照し，$\left|\dfrac{p}{q}\right| \fallingdotseq 1$ とおいて

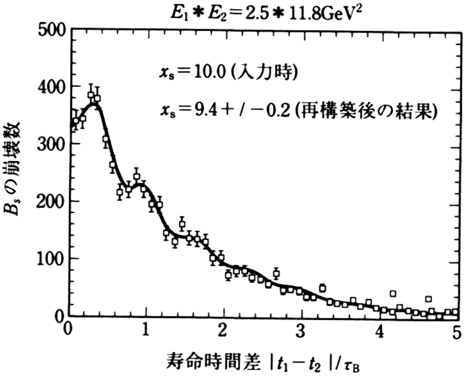


図 2.11　x_s 振動モンテカルロシミュレーション[44)]
非対称 e^+e^- 衝突型加速器 (2.5 GeV × 12 GeV), $\int L\,\mathrm{d}t = 10^{40}\mathrm{cm}^{-2}$, 衝突点分解能 40μm を仮定する. 混合パラメター $x_s = 10$ のときのシミュレーション.

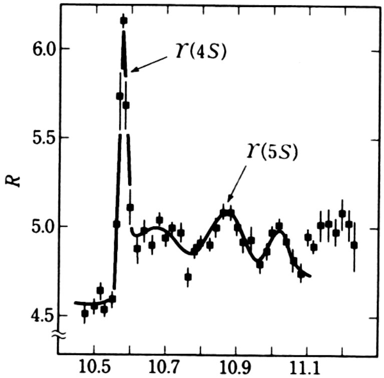


図 2.12　$\Upsilon(4S)$, $\Upsilon(5S)$ の生成断面積[45)]
$\Upsilon(4S)$ は $L=1$ 状態, $B^0\overline{B}^0$, B^+B^- 生成が主反応である.

$$\Gamma(B^0(t_1),\ f(t_2)) \sim \mathrm{e}^{-\Gamma(t_1+t_2)}\{1+\eta_F \sin 2\phi \sin \Delta m(t_1 \pm t_2)\}$$
$$\Gamma(\overline{B}^0(t_1),\ f(t_2)) \sim \mathrm{e}^{-\Gamma(t_1+t_2)}\{1-\eta_F \sin 2\phi \sin \Delta m(t_1 \pm t_2)\} \tag{2.169}$$
$$\eta_F \sin 2\phi = -\mathrm{Im}\beta = -\mathrm{Im}[(q/p)\bar{\rho}_f] \tag{2.170}$$
$$\therefore \quad A_f(t) = \frac{\Gamma(B^0, f) - \Gamma(\overline{B}^0, f)}{\Gamma(B^0, f) + \Gamma(\overline{B}^0, f)} = \eta_F \sin 2\phi \sin \Delta m(t_1 \pm t_2) \tag{2.171}$$

この式を眺めると $L=$奇数の場合は非対称パラメターは $\Delta t = t_1 - t_2$ の奇関数であることがわかる. したがって t_1 と t_2 を対称的に取り扱う場合, 特に時間で積分してしまう場合は非対称は相殺されて 0 となる. すなわち $\Upsilon(4S)$ からの $B^0\overline{B}^0$ は $L=1$ 状態にあるので, CP 非対称は, 対称衝突型加速器を使う限り時間積分されてしまうので消える. このため $L=$偶数の状態を含むところ例えば $\Upsilon(4S)$ より上にエネルギーを設定するか (この場合 $B\overline{B}$ 生成断面積が小さいので, 計数率で損をする. 図 2.12 参照[45)]), e^+ と e^- のエネルギーを非対称とし, B^0 と $\overline{B}^0$ の飛翔中に崩壊を起こさせ, 崩壊時刻の差 Δt を測定することにより非対称を測定する必要性がでてくる. 後者の場合は $|\Delta t|$ のみが測定可能であるので, (2.169) (下側の符号) を $t_1 + t_2$ について積分すれば

$$\Gamma(B^0, f; |\varDelta t|) \sim -\mathrm{e}^{-\Gamma|\varDelta t|}\left(1+\eta_F \sin 2\phi \sin x \frac{|\varDelta t|}{\tau}\right) \qquad (2.172)$$

図 2.13 に非対称衝突型加速器で，$B^0\overline{B}^0$ を測定したときの反応事象がどう見えるかの一例を示す．

なお対称衝突型加速器で CP の非対称が観測できないというわけではない．L＝偶数（あるいはいろいろな L が混在している）のときは時間積分が可能である．(2.169)（上側の符号）を積分すると

$$A_f \sim \sin 2\phi \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad (2.173)$$

つまり，非対称の大きさは $(2x/(1+x^2)^2)$ 分だけ小さくなる．この項を薄めの因子 (dilution factor) と呼ぶ．対称衝突型加速器のときは，生成断面積が小さくなり，かつ薄めの因子がかかる分だけ実験が困難になるということであって，それに見合うだけ加速器の性能が上回れば原理的には実験可能である．

CP の破れの測定は B_s 系では B_d 系に比べてさらにむずかしいであろうと想定される．その理由は

(1) B_s の生成数は B_d に比べて 1/2～1/3

(2) 混合効果は最高度に起きており，振動が激しくて $\varDelta t$ の測定が困難

(3) 非対称が大きいときは分岐比が小さく，分岐比が大きいときは非対称が小さい．

したがって，CP 非保存は B_d 系で観測するのが容易であろう．

ここで，CP の非対称を有意に観測しうるために加速器に要求される輝度を計算してみよう．例として採用する反応は $\overline{B} \to J/\psi + K_s$ とし，B はレプトンもしくは $K^\pm$ で同定するものとする．非対称はポアソン分布をするので，非対称度 A のとき，統計有意度（中央値の差 $\varDelta s$ の統計誤差 σ に対する比 $\varDelta s/\sigma$ のこと）を n にするための事象数は

$$N > n^2(1-A^2)/A^2$$

このとき加速器に必要な積分輝度 $\int L\,\mathrm{d}t$ は次式で与えられる[46]．

$$\int L\,\mathrm{d}t = (n/A)^2\{\sigma f(2B)\varepsilon_r\varepsilon_t\}^{-1} \qquad (2.174)$$

$$A = (1-2w)d \sin 2\phi$$

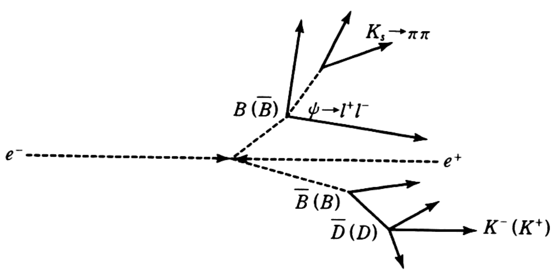
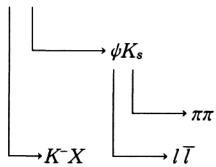


図 2.13 非対称衝突型加速器では $(t_1 - t_2)$ またはヴァーテックス間の距離が測れる．図は
$e^+e^- \to \Upsilon(4S) \to B^0\bar{B}^0$



で B^0 は K^- または l^- で同定し相手の $\bar{B}^0$ 崩壊を見る．

ここで

n：統計有意数＝ここでは 3 と設定

A：非対称の大きさ

σ：$e^+e^- \to \Upsilon(4S)$ の断面積＝1.15 nb＝1.15×10^{-33} cm^2

f：$\Upsilon(4S) \to B^0\bar{B}^0$ の分岐比＝0.5

B：上記の f 以降のすべての崩壊分岐比の積

$$\sim 4\times10^{-4} \qquad \sim 0.14 \qquad \sim 0.69$$
$$= BR(B^0 \to \psi K_s)BR(\psi \to l^+l^-)BR(K_s \to \pi^+\pi^-)$$

ε_r：B_1 の再現効率 $\sim 0.65 = \varepsilon(\psi)\cdot\varepsilon(K_s)$

ε_t：B_2 の識別効率（$l^\pm$ または $K^\pm$）~ 0.48

w：識別誤認率　　~ 0.07

d：非対称の薄め因子*8) $\sim x_d/(1+x_d{}^2) = 0.47$

$\sin 2\phi$：物理的非対称の大きさ $\sim$ 0.1-0.6

*8) 測定時間分解能の幅だけは時間積分しなければならないことによる．

これより，$n=3$ として，

$$\int L\,\mathrm{d}t=(1\text{-}10)\times 10^{40}/\mathrm{cm}^2 \tag{2.175}$$

1 年に 10^7 秒（＝115 日）運転できるものとすると輝度としては，$10^{34}/\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$ を実現できれば，1 年以内の実験で非対称が観測できることになる．

現在，日本の高エネルギー加速器科学研究機構 (KEK) とアメリカの SLAC で，B-ファクトリー加速器建設が進行中であり，BELLE (KEK) と BABAR (SLAC) の実験グループが実験準備を進めている．図 2.14 に BELLE 測定器の概要を示す．1999 年には稼働予定であるので，今世紀中には何らかの結果がでるものと期待される．

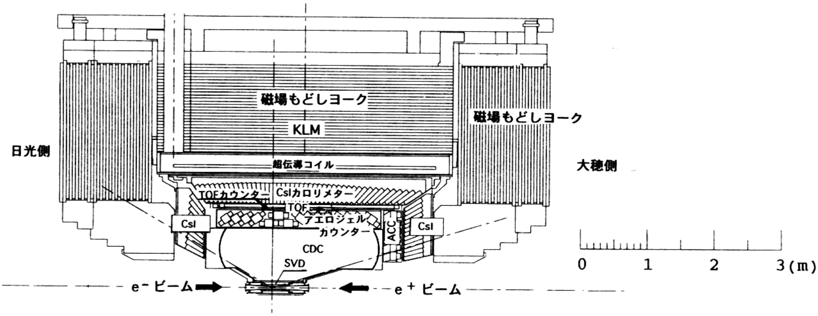


図 2.14　KEK の BELLE 検出器（1/2 切断面）

8 GeV の電子ビームと 3.5 GeV の陽電子ビームが衝突し $e^-+e^+\rightarrow\gamma(4S)\rightarrow B_0+\overline{B}_0$ 反応により中性 B 中間子対をつくりその崩壊生成物を検出する．崩壊点分布を SVD で測定する．Z 測定精度 80μm，磁場の強さは 1 テスラ，CDC の位置分解能は 100μm，$\sigma_{P_T}/P_T=0.5\sqrt{P_T{}^2+1}$ % の性能をもつ．SVD：シリコンヴァーテックス検出器，CDC：中央軌跡検出器，ACC：アエロジルチェレンコフカウンター，TOF：飛行時間測定カウンター，CsI：ヨウ化セシウムカロリメター，KLM：K_L 中間子/ミューオン検出器．

2.10　CP の諸問題[15)]

この章では，CP の破れを標準理論の範囲で議論したが，標準理論の範囲外で理解しようとする試み，および CP の破れを巡る話題を，いくつか簡単に紹介しておこう．

a. 超弱相互作用

K 崩壊での CP 非保存効果は，$\Delta S=2$ の新相互作用が原因であるとする理論であるので，第 1 近似では，$\Delta S=1$ の崩壊は存在せず，

$$\varepsilon=\eta_{+-}=\eta_{00}, \qquad \varepsilon'=0 \tag{2.176}$$

となる．最近の実験で $\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon)\neq 0$ が確立したので[16] 少なくも K メソンに関しては超弱理論は否定されたとになる．

B 崩壊に関しても，$\Delta B=2$ の超弱相互作用が原因とすると，CP の破れは混合パラメター ε_B にのみ存在する．この場合，B^0-$\overline{B}^0$ 混合を通しての CP の固有状態への崩壊非対称パラメターは，

$$A(\pi^+\pi^-)=-A(J/\psi\cdot K_S) \tag{2.177}$$

となる．負の符号は，それぞれの終状態の CP 固有値が逆であることによる．標準理論では，この条件は $\eta=(1-\rho)[\rho/(2-\rho)]^{1/2}$ によって満たすことができるので，実験検証の際の誤差を考慮すると，ρ-η 平面で，標準理論と超弱理論と区別できない領域が存在する[47]．

b. 複数のヒッグス

標準理論でのヒッグス場には，一つの二重項が存在するのみである．超対称性理論（第 5 章）やアクシオンの存在（第 6 章）には，2 個のヒッグス二重項を必要とする．ヒッグス場の真空期待値は複素数であるので，もしヒッグス二重項が，2 個存在すれば CP 非保存効果が生じる．ただし，この理論に基づいた計算では，中性子の電気双極子の値が大きくなりすぎ，実験値と矛盾するように見えるので，現時点ではあまり真剣には取り上げられていないが，将来の可能性として残る[48]．

c. 左右対称モデル

標準理論での電弱相互作用のゲージ群は $SU(2)_L\otimes U(1)$ であるが，これを $SU(2)_L\otimes SU(2)_R\otimes U(1)$ に拡張する試みがある[49]．この場合，右巻きの W ボソンが導入される．自発的対称の破れにより，現実の世界では，$SU(2)_L$ 対称のみ実現されていると考えるのである．そのためには，W_R の質量は十分重く，既知の粒子への結合は小さいとしなければならない．左右対称モデルでは，右巻きクォークも荷電カレント反応に関与してくるので KM 行列への制限がゆるくなり，クォーク 2 世代で CP の破れを引き起こすことができる．

CP の破れへの寄与は，例えば箱型図の中の W_L の代わりに W_R が入った状態を考えることができる．実験値と矛盾しないという条件をつけると，W_R の質量は数 TeV 以上でなければならない．

d．強い相互作用の CP の破れの問題

通常は無視するが，QCD ラグランジアンの中に，次式で表されるようなグルーオン自己相互作用項が存在してはならないという理由はない．

$$\mathscr{L}=\frac{g^2}{64\pi^2}\theta\sum_a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}{}^a F_{\rho\sigma}{}^a \tag{2.178}$$

$$\theta=\theta_0+\arg(\det M^U \det M^D) \tag{2.179}$$

この項は全微分の形をしているために摂動論では寄与しないが，非摂動効果 (θ-真空) によって，有限な値を生じることが示されている[50]．θ_0 は QCD における真空を記述する量であり，M^U, M^D は質量行列である．問題はこのラグランジアンが P, T および CP を破ることであり，この結果として，例えば中性子の電気双極子の値が 0 でなくなる ($d_n \sim 10^{-16}\theta e$cm)．実験値と矛盾しないためには，$\theta \lesssim 10^{-9}$ でなければならない．したがって，理論的にこの項は存在してはいけないと考えるのが妥当であろう．これが，強い CP の破れの[51]問題である．この問題は，第 6 章で詳しく議論する．

e．宇宙のバリオン数

われわれの住む宇宙における物質量と反物質量は等しくない．ビッグバン状態からバリオン数と反バリオン数の非平衡を生み出すための必須条件として，(1) CP 非保存，(2) バリオン数非保存，(3) 宇宙が熱的非平衡状態を経由するという 3 条件があげられている[52]．つまり，CP の解明は，われわれ自身の存在理由解明に関わっているが，この問題は第 8 章「宇宙論」でふれることにする．

参 考 文 献

1) M. Kobayashi and T. Maskawa : *Prog. Theor. Phys.*, **49** (1979) 652
2) Particle Data Group : *Phys. Rev.*, **D50** (1994) ; **D54** (1996) ; EPJ, **3** (1998)
3) L. Wolfenstein : *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1984) 1945
4) G. Altarelli and P. Franzini : *Z. Phys.*, **C37** (1988) 271

S. Stone : "Semi-Leptonic Decays ; Experiments" in the book "B Decays", ed. S. Stone, World Scientific, Singapore, 1991
V. Luth : Talk Int. Conf. on Lepton and Photon, Ithaca, NY, USA (1993)
5) 例えば, F. Gilman and Y. Nir : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **40** (1990) 213-238
A. J. Buras, M. Jamin and P. Weisz : *Nucl. Phys.*, **B347** (1990) 491
M. Neubert : *Phys. Rev.*, **D51** (1995) 5101
6) A. Sirlin : *Phys. Rev.*, **D35** (1987) 3423
7) H. Leutwyler and M. Ross : *Z. Phys.*, **C25** (1984) 91
8) J.F. Donoghue *et al.* : *Phys. Rev.*, **D35** (1987) 934
9) CDHS ; H. Abramowicz *et al.* : *Z. Phys.*, **C15** (1982) 19
C. Foudas *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 1207
S. A. Rabinowitz *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 134
A. O. Bazarko *et al.* : *Z. Phys.*, **C65** (1995) 189
10) J.C. Anjos *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 1587
J. Raab *et al.* : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 391
11) M. Bauer *et al.* : *Z. Phys.*, **C29** (1985) 637
B. Grinstein *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 298 ; *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 799
12) CLEO ; R. Fulton *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 16
G. Crawford *et al.* : EPS Conf., Marseille, France, July, 1993, Conf. 93-30
ARGUS ; H. Albrecht *et al.* : *Phys. Lett.*, **B234** (1990) 409 ; *Z. Phys.*, **C57** (1993) 533 ; *Phys. Lett.*, **B275** (1992) 195
13) CLEO ; I.P.J. Shipsey : Proc. Les Rencontres de Physique de la Vallee d'Aoste, "Results and Perspectives in Particle Physics", La Thuile, Italy, March 3-9, 1991, PU-91-654
ARGUS ; *Phys. Lett.*, **B255** (1991) 297
14) H. Albrecht *et al.* : *Phys. Lett.*, **B229** (1989) 175
15) C. Jarlskog : "CP Violation", Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 3, ed. by C. Jarlskog, World Scientific, p. 3
16) T. Yamanaka : Talk at 54th Annual Meeting of Japan Physical Society, March 28 -31, 1999
17) I.I. Bigi and V.A. Khoze in 15), p. 75
18) ARGUS ; H. Albrecht *et al.* : *Phys. Lett.*, **B192** (1987) 245
CLEO ; M. Artuso *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 2233
19) OPAL ; K, Ackerstaff *et al.* : *Z. Phys.*, **C76** (1997) 401, 417
20) L. Wolfenstein : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **36** (1986) 137
C. Sachradja : Heavy Flavor Physics, XVIII Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions, July 1997, Hamburg, Germany
21) E691 ; L. Louis : *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 1027
S. McHugh : Proc. XXIV Int. Conf. High Energy Conf., Heidelberg, 1989
22) J.S. Hagelin : *Nucl. Phys.*, **B193** (1981) 123
L.L. Chau : *Phys. Rep.*, **95** (1983) 1
23) T. Inami and C.S. Lim : *Prog. Theor. Phys.*, **65** (1981) 297 ; **65** (1982) 1772

24) F. Gilman and M. Wise : *Phys. Rev.*, **D27** (1983) 1128
25) P.J. Franzini : *Phys. Rep.*, **173** (1989) 1
26) M.K. Gaillard and B.W. Lee : *Phys. Rev.*, **D10** (1974) 897
27) A. Buras and J.-M. Gerard : *Phys. Lett.*, **B203** (1988) 272
K.R. Schubert : *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **21** (1988) 3
28) A.J. Buras *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B245** (1984) 369 ; **B347** (1990) 491
29) C. S. Kim *et al.* : *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 96
P. Langacker : UPR-0468T, Talk at Symp. on TeV Phys., at China Center of Ad. Sci. and Tech., May, 1990A
30) I.A. Sanda : Task Force Report on Asymmetric B-Factory at KEK, Feb. 28, 1990, p. 86
31) A. Pich : CERN-TH 7114/93, CP Violation, Lecture at ICTP Summer School in High Energy Physics and Cosmology, ICTP, Trieste, Italy, June 1993
32) B. Winstein and L. Wolfenstein : *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993) 1113
A. Buras *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B423** (1994) 349
33) L. Littenberg and C. Valencia : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **43** (1993)
D.H. Harris *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 3914
34) J. Ellis and J.S. Hagelin : *Phys. Lett.*, **B192** (1987) 201
J. Rosner : The Cabbibo-Kobayashi-Maskawa Matrix which appeared in "B decays", World Scientific, Singapore, 1991, ed. S. Stone
35) BNLE787 ; M.S. Atiya *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 21
S. Adler *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 2204
36) L. Littenberg : *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 3322
37) A. J. Buras : *Phys. Lett.*, **B333** (1994) 476
38) K. Hanagaki : Ph. D. Thesis, O'saka Univ., August, 1998
39) Y. Azimov *et al.* : *Yad. Fiz.*, **45** (1987) 1412
A. Buras *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B238** (1984) 529
40) I.I. Bigi and A. Sanda : *Nucl. Phys.*, **B193** (1981) 85 ; **B281** (1987) 41
41) D. London and R.D. Peccei : *Phys. Lett.*, **B223** (1989) 257
42) M. Gronau : *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 1451
B. Grinstein : *Phys. Lett.*, **B229** (1989) 280
43) M. Gronau and D. London : *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 3381
44) T. Kamitani : Task Force Report on Asymmetric B-Factory at KEK, Feb. 28, 1990, p. 145
45) CLEO ; D. Besson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **54** (1985) 381 ; **67** (1991) 1698
CUSB ; K. Han *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) 36
46) H. Ozaki : Task Force Report on Asymmetric B-Factory at KEK, Feb 28, 1990, p. 185
47) B. Winstein : *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 1271
48) I.I. Bigi and A.T. Sanda : On Spontanaes CP Violation Triggered by Scalar Bosons, in "CP Violation" 文献 15), p. 362
49) R. N. Mohapatra : CP Violation and Left-Right Symmetry, in "CP Violation" 文献

15), p. 384
50) G.'t Hooft : *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976) 8 ; *Phys. Rev.*, **D14** (1976) 3432
51) R.D. Peccei : "The Strong CP Problem" in CP Violation 15), p. 503
52) A.D. Sakharov : *Pisma Zh. Exp. Teor. Fiz.*, **5** (1967) 32, English Translation *JETP Lett.*, **5** (1967) 24

3
ヒ　ッ　グ　ス

ヒッグスは，対称の自発的破れを引き起こす機構の鍵を握る粒子として，GWS 理論の要をなす粒子である．しかし，対称性を破る力学的原因が不明なので，GWS 理論の理論としての弱点が集中しているところでもある．ゲージセクター側は，ヒッグスの役割は質量を付加するだけのことで，質量さえもらえば後は関知しないという態度をとっているので，ヒッグスに対する手がかりはゲージセクターからは得られない．ヒッグス粒子の質量を決める手がかりはきわめて薄弱である．またフェルミオンの質量を決めるのに，粒子の数だけパラメター（結合定数）が必要というのは，統一理論としてははなはだ不満である．逆にいうと，現在すべての実験事実を矛盾なく説明して，欠点のないように見える標準理論に，綻びがあるとすればそれはヒッグスセクターで見つかることはほぼ確実であると思われる．それゆえにこそヒッグス粒子を発見しヒッグス機構の仕組みを解明することが肝要である．

この章ではヒッグス粒子の性質，質量の許容範囲，発見法[1]，そしてヒッグス粒子を発見できなかった場合の戦略を議論する．また，超対称ヒッグスの可能性についてもふれる．

3.1　ヒッグス粒子の相互作用

3.1.1　ラグランジアン

GWS 理論のラグランジアンから，ヒッグス粒子の関わるところを抜き出して書き下ろす．共変微分を

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - i g_W \frac{\tau_a}{2} W_a - \frac{i g_B}{2} B_\mu\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+\varphi}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

として，

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_H &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda\left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 - \sum \frac{m_f}{v} \bar{f} f \varphi \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m_H{}^2 \varphi^2) - \lambda v \varphi^3 - \lambda \frac{\varphi^4}{4} \\ &\quad - (\sqrt{2} G_F)^{1/2} \sum_f m_f \varphi \bar{f} f + 2(\sqrt{2} G_F)^{1/2} \varphi \left(m_W{}^2 W^+{}_\mu W^{-\mu} + \frac{m_Z{}^2}{2} Z_\mu Z^\mu\right) \\ &\quad + \sqrt{2} G_F \varphi^2 \left(m_W{}^2 W^+{}_\mu W^{-\mu} + \frac{m_Z{}^2}{2} Z_\mu Z^\mu\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$g_W = \frac{e}{\sin\theta_W} = 2(\sqrt{2} G_F)^{1/2} m_W \tag{3.3 a}$$

$$g_Z = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} = 2(\sqrt{2} G_F)^{1/2} m_Z \tag{3.3 b}$$

$$m_H{}^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2 \tag{3.3 c}$$

$$\frac{g_W}{2 m_W} = \frac{1}{v} = (\sqrt{2} G_F)^{1/2} \fallingdotseq (246\ \mathrm{GeV})^{-1} \tag{3.3 d}$$

となる．この式からわかるようにヒッグス粒子の結合の強さは結合する相手の質量に比例する．ヒッグス粒子の自己相互作用の強さを表す量 λ もまたヒッグスの質量（の自乗）に比例する．λ は未知のパラメターであり，したがってヒッグス粒子の質量も未知である．ヒッグス粒子の相互作用に関するファインマン規則を図 3.1 に示す．

3.1.2 崩壊モード

a. フェルミオンへの崩壊

ラグランジアンが与えられているから，2 個のフェルミオンへの崩壊する行列要素が書き下ろせる．

$$\mathscr{M}(H \to \bar{f} f) = (\sqrt{2} G_F)^{1/2} m_f \bar{u}(p_1) v(p_2) \tag{3.4}$$

これから崩壊幅は容易に計算できて

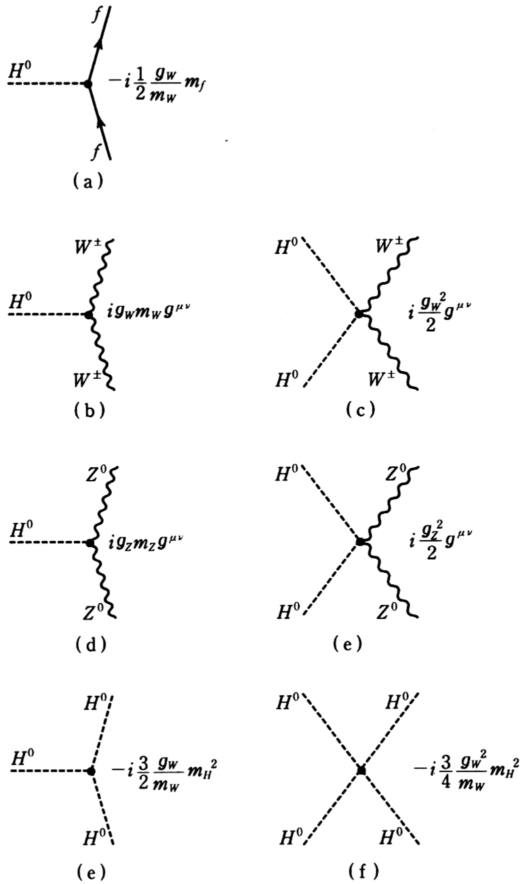


図 3.1 ヒッグス相互作用のファインマン則. $g_W=e/\sin\theta_W$, $g_Z=g_W/\cos\theta_W=e/\sin\theta_W\cos\theta_W$
(a) はフェルミオン, (b), (c) は W, (d), (e) は Z との相互作用を表し, (e), (f) は自己相互作用である.

$$\Gamma(H\to \bar{f}f)=\frac{N_c G_F {m_f}^2 m_H}{4\sqrt{2}\pi}\left(1-\frac{4{m_f}^2}{{m_H}^2}\right)^{3/2} \tag{3.5}$$

レプトンに対しては $N_c=1$, クォークに対しては $N_c=3$ である. 結合の大きさが質量に比例するため, ヒッグス粒子のフェルミオン崩壊はエネルギー的に許される範囲で最も大きな質量をもつフェルミオン対へ崩壊するモードが優勢である. すなわち $m_H<2m_W$ では, $H\to b\bar{b}$ が最も優勢となる.

b. ボソンへの崩壊

ヒッグスの質量が $2m_W$, $2m_Z$ を超えるときは, W, Z 対へ崩壊できる. W へ崩壊する行列要素は, (3.2) の第 3 行を参照して

$$\mathcal{M}(H \to W^+W^-) = 2(\sqrt{2}G_F)^{1/2} m_W{}^2 \varepsilon_\mu{}^*(p_1, \lambda_1)\varepsilon^\mu(p_2, \lambda_2) \tag{3.6}$$

これから，横偏極 ($\lambda=\pm$) と縦偏極 ($\lambda=3$) の W 対への崩壊幅は，

$$\Gamma(H \to W_T W_T) = \frac{G_F m_W{}^4}{2\sqrt{2}\pi m_H}(1-4y_W{}^2)^{1/2} \tag{3.7 a}$$

$$\Gamma(H \to W_L W_L) = \frac{G_F m_H{}^3}{8\sqrt{2}\pi}(1-2y_W{}^2)^2(1-4y_W{}^2)^{1/2} \tag{3.7 b}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(H \to WW) &= 2\Gamma(H \to W_T W_T) + \Gamma(H \to W_L W_L) \\ &= \frac{G_F m_H{}^3}{8\sqrt{2}\pi}(1-4y_W{}^2+12y_W{}^4)(1-4y_W{}^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.7 c}$$

ただし，$y_W = \dfrac{m_W}{m_H}$，　$y_Z = \dfrac{m_Z}{m_H}$ (3.7 d)

と求められる．これから，$m_H \gg m_W$ ならば，ヒッグスの崩壊によって生成される W 対は縦偏極の W が優勢であることがわかる．Z への崩壊も同様にして，

$$\Gamma(H \to ZZ) = \frac{G_F m_H{}^3}{16\sqrt{2}\pi}(1-4y_Z{}^2+12y_Z{}^4)(1-4y_Z{}^2)^{1/2} \tag{3.8}$$

W への崩壊と 2 だけの因子分異なるが，これは同一粒子に対するボース統計因子である．$m_H \gg m_Z$ に対して，$\Gamma(H \to WW) \fallingdotseq 2\Gamma(H \to ZZ)$ である．

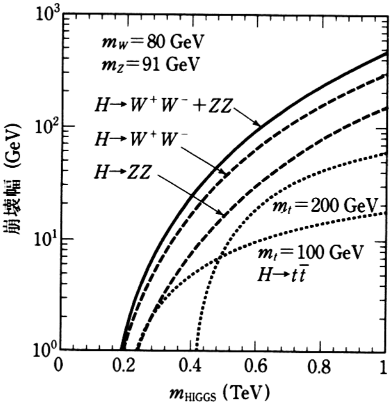
c.　ヒッグスの崩壊分岐比

上記の崩壊幅の計算をすべての可能な崩壊モードについて行えば，ヒッグス粒子の崩壊モードの分岐比が計算できる．$m_H < 2m_W$ ならば，主要崩壊モードは $b\bar{b}$ である．$m_H > 2m_W$ ならば主要崩壊モードは WW と ZZ のベクトルボソンである．図 3.2 に崩壊幅 Γ_H，分岐比 BR を m_H の関数として描く．$m_H \sim 160$ GeV 付近で $H \to ZZ$ の分岐比が減少するのは，WW 生成のしきい値効果である．

3.2　ヒッグスの質量

3.2.1　放射補正データからの推定

ヒッグスが LEPII ($\sqrt{s}=200$ GeV の e^+e^- コライダー) でこれまで発見できていないという事実から，質量値は $m_H \gtrsim 89.8$ GeV (95%CL) という条件



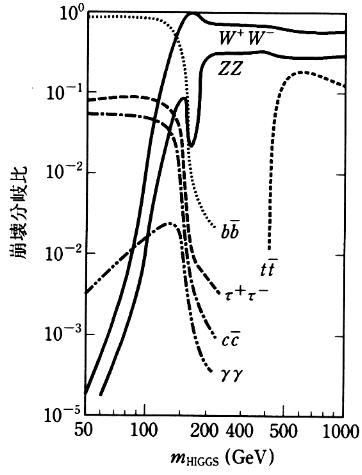


図 3.2 ヒッグス粒子の崩壊幅と分岐比
(a) ヒッグス粒子の崩壊幅の m_H 依存性
(b) ヒッグス粒子の崩壊モードの分岐比

がついている[2,3]. それ以外の質量情報は放射補正に対する効果から得られて, ヒッグス質量の推定値を引き出すことができる. Z 崩壊幅などの精密測定をすることにより $\sin^2\theta_W$ や中性カレント/荷電カレント結合定数比 ρ を決め, トップの質量 175 GeV を入れ, ヒッグス質量について解くのである (詳しくは, II-§7.3 を参照).

$$\rho=1+\delta\rho_t+\delta\rho_H+\cdots \tag{3.9}$$

$$\delta\rho_t \fallingdotseq \frac{3G_F{m_t}^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \fallingdotseq 0.0096\left(\frac{m_t}{175\,\mathrm{GeV}}\right)^2 \tag{3.10 a}$$

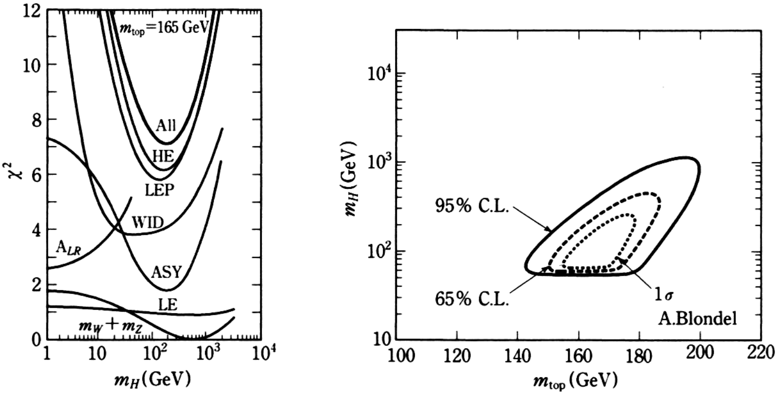
$$\delta\rho_H \fallingdotseq -\frac{3G_F{m_Z}^2{s_W}^2}{8\sqrt{2}\pi}\left(\ln\frac{{m_H}^2}{{m_W}^2}-\frac{5}{6}\right) \tag{3.10 b}$$

どの実験値をどれだけの重みを入れて解くかで答がかなり変わる. ヒッグス粒子の寄与は対数的にしか変化しないので, 質量変化による放射補正の変化がわずかであり, m_H の推定には数値的には大きな不定性がある. 逆にいうと現時点でのデータから決められる質量値は, まだ流動的で不定性が大きい. 図 3.3 (b) に LEP データを総合的に使用して, 最適化した曲線の質のよさ (χ^2 値) を m_t, m_H の関数として示す[4]. ヒッグス粒子に許される範囲内での質量下限

値に近いところが最適値であるが，$m_H \lesssim 1$ TeV は十分許容範囲である．CDF が決めたトップの質量値 $m_t = 175 \pm 20$ GeV[5] を初期条件として入れれば，ヒッグスの質量についてはもう少し制限がつき，1σ で

$$m_H = 130^{+320}_{-90}\ \mathrm{GeV} \tag{3.11}$$

と推定できる（図 3.3 (a)），95% 信頼極限値は 1.1TeV である[6)*1)]．



(a)　　　　　　　　　　　(b)

図 3.3 トップとヒッグスを考慮した放射補正式を，精密データで最適化して得られる χ^2 曲線
(a) LEP など電弱相互作用データを総合し，m_t=165 GeV に固定したときの m_H-χ^2 曲線[6]
(b) m_t, m_H を独立パラメターとする χ^2 の 2 次元平面での曲線[4]

3.2.2 理論的下限

上に述べたように，ヒッグスの質量は数百 GeV 以下である可能性があるが，トップ質量を推定したときほどの信頼性はないので，以下では，これに縛られずに議論をする．

ヒッグス粒子の質量に対する下限条件の一つは，真空の安定性より得られる．対称性が自発的に破れるためには，一定の条件がついていた．すなわち，$\lambda > 0$ であることがヒッグスポテンシャル

$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2/2)^2 = V(0) - \frac{{m_H}^2}{2}\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{3.12 a}$$

---

*1) 最近では，m_H=83〜140 GeV，95%信頼上限値は ≃360 GeV と一層きつくなっている[3]．

$$m_H{}^2=2\lambda v^2 \tag{3.12 b}$$

が $\langle\phi\rangle=v/\sqrt{2}>0$ において最小値をもつことを保証していた．しかし，それはトリー近似の範囲であり，量子補正を入れると条件が変わる．ヒッグス粒子の伝播関数にループ補正を入れたときの結合定数 λ の変化は，繰り込み群方程式によって次式で与えられる[1)]．

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=\beta(\lambda)=\frac{3}{4\pi^2}(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-) \tag{3.13}$$

$$\beta(\lambda)=\frac{1}{16\pi^2}\left[12\lambda^2+6\lambda h^2-3h^4-\frac{3}{2}\lambda(3g_W{}^2+g_B{}^2)+\frac{3}{16}\{2g_W{}^4+(g_W{}^2+g_B{}^2)^2\}\right] \tag{3.14}$$

ここに，$\tau=\ln(Q^2/Q_0{}^2)$，$h=\sqrt{2}m_t/v$，g_B は $U(1)$ 結合定数であり，トップクォーク以外の軽いクォークの寄与は無視した．λ はもはや定数ではなく，τ の関数である．もともとの λ は $Q=Q_0(=v)$ での値であると見なせる．放射補正を入れた結果，ポテンシャルは変更を受けるので，ϕ の真空期待値 v もまたポテンシャルの極小値を与える $\phi=\phi_c$ の期待値と定義し直さなければならない．簡単のため，h, g_W, g_B の Q^2 依存性を無視すれば，$\beta(\lambda)$ は λ の2次関数であり二つの根 $\lambda_\pm$ をもつ．$4m_t{}^4>2m_W{}^4+m_Z{}^4$ に対しては，$\lambda_-<0<\lambda_+$ である．初期値 $\lambda_0=\lambda(Q_0)$ の大小すなわち，$\lambda_0>\lambda_+$，または，$0<\lambda_0<\lambda_+$ に応じて，(3.13) の解は次式で与えられる．

$$\frac{\lambda-\lambda_-}{\lambda-\lambda_+}=\pm A\mathrm{e}^{-\delta\tau} \tag{3.15 a}$$

$$\delta=\frac{3}{4\pi^2}(\lambda_+-\lambda_-) \tag{3.15 b}$$

$0<\lambda_0<\lambda_+$ ならば，$\beta(\lambda)<0$ であるので，Q を大きくしていくとある $Q=\Lambda$ で $\lambda<0$ となる．このとき，ポテンシャルは ϕ の大きいところで負となり，極小値をもたない．すなわち真空は不安定となる．もっとも Q のすべての変数領域で，$\lambda>0$ を要求するのはきびしすぎるかもしれない．なぜなら，そもそも出発点のラグランジアンですら Q の全領域での有効性を保証されているわけではないからである．そこで，ラグランジアンの適用有効限界を $Q<\Lambda$ としその範囲内で真空の安定を要求すると，Λ に依存する λ の下限，したがってヒッグス質量の下限が存在する．この下限の概略値を簡単に見るには $\lambda>\lambda_+$

と設定すればよい．$\lambda_0 > \lambda_+$ ならば $\beta(\lambda) > 0$ であるので，$\lambda > 0$ は保証されている．したがって，

$$m_H{}^2 = 2\lambda v^2 > 2\lambda_+ v^2 = m_W{}^2 + (m_Z{}^2/2) - m_t{}^2$$
$$+ [\{m_W{}^2 + (m_Z{}^2/2) - m_t{}^2\}^2 + 4m_t{}^4 - 2m_W{}^4 - m_Z{}^4]^{1/2}$$
$$\fallingdotseq (\sqrt{5} - 1) m_t{}^2 \quad (m_t \gg m_W,\ m_Z) \tag{3.16}$$

は，真空が安定するための十分条件である．ただし，ある $Q = \Lambda$ で，$\lambda \to \infty$ となって摂動的取扱いは破綻するので，$Q \gtrsim \Lambda$ では新現象が起きるとしなければならない．以上は定性的な議論である．実際の真空安定条件は，Λ の値を与えて，g_W, g_B, h を含む繰り込み群連立方程式を数値的に解いて得られる．図 3.4 に初期の計算例を示す[7]．右側の斜めに走る直線がヒッグスの質量の下限値を与える．

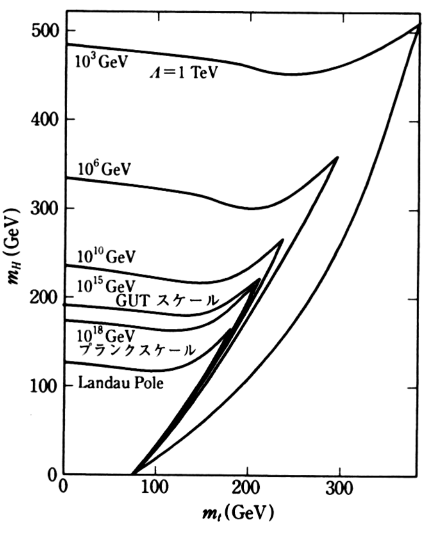


図 3.4 真空の安定性からくる条件（斜めの線）とトリヴィアリティ条件（横の線）により，ヒッグスの質量とトップの質量は各線の下側かつ左側に限られる．各線にある値は切断 Λ の値である[7]．

以上の議論は，摂動の最低次の閉ループのみを入れた繰り込み群方程式に基づく．さらに高次の閉ループをとりいれて精密化しても，定性的な話の筋道に変わりはない．ただし，数値的には初期の議論からかなり変わってきており，

例えば真空の安定性の議論からは，$\Lambda \sim 10^{15}$ GeV に対し，

$$m_H(\mathrm{GeV}) > 132 + 2.2(m_t - 170) - 4.5(\alpha_s - 0.117)/0.007 \tag{3.17}$$

を得ている[8]．もっともこの制限はきつすぎるという考え方もある．真空が不安定であっても崩壊寿命が現在の宇宙年齢（≒10^{10} 年）より長ければよしとすれば[9]，

$$m_H(\mathrm{GeV}) > 5.9(m_t - 170) \tag{3.18}$$

となり，制限はずっと緩くなる．

3.2.3 理 論 的 上 限

a. ユニタリティ

ヒッグスの質量は無制限には大きくなれない．最も簡単な議論はトリーレベルの散乱振幅のユニタリティからくる．そのためにゲージボソン特に W の散乱振幅を考えよう．WW の弾性散乱のファインマン図を図 3.5 に示す．

ゲージ不変性が成立していると，種々のグラフが相殺して無限大の発散をたかだか対数発散にとどめる．例えば，散乱振幅の部分波で s^2 に比例する項は図 3.5 のゲージボソンのグラフが互いに相殺し合い，s に比例する項はゲージボソンとヒッグスを交換する項が相殺し合うので，残るはたかだか $\ln s$ 程度となる．$\sqrt{s} \gg m_W,\ m_H$ で優勢となるのはヒッグスを仲介とする過程であり，その振幅は近似的に次式で与えられる[10]．

$$\mathcal{M}(W_L{}^+W_L{}^- \to W_L{}^+W_L{}^-) = -\sqrt{2}G_F m_H{}^2\left[\frac{s}{s-m_H{}^2} + \frac{t}{t-m_H{}^2}\right] + O(m_W{}^2/s) \tag{3.19}$$

部分波に分解すれば

$$\mathcal{M}(s,t) = 16\pi\sum(2J+1)a_J(s)P_J(\cos\theta) \tag{3.20}$$

であるので，$m_H{}^2 \gg m_W{}^2$ として a_0 を求めれば

$$a_0(W_LW_L \to W_LW_L) = \frac{-G_F m_H{}^2}{8\sqrt{2}\pi}\left[2 + \frac{m_H{}^2}{s-m_H{}^2} - \frac{m_H{}^2}{s}\ln\left(1+\frac{s}{m_H{}^2}\right)\right] \tag{3.21}$$

十分高エネルギーでは第 1 項が優勢である．ユニタリティから $|a_0| \leqq 1$ が要求されるので，

$$m_H{}^2 \leqq \frac{4\pi\sqrt{2}}{G_F} \tag{3.22}$$

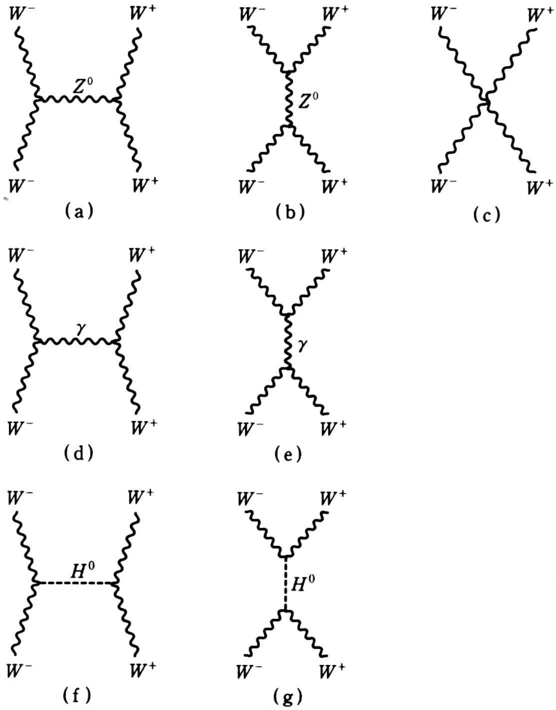


図 3.5 W^-W^+ 散乱における Z^0, γ, H^0 仲介グラフ

を得る．W_LW_L, Z_LZ_L, HH, HZ 散乱の複合系として解くと，さらに 2/3 の減少因子が得られる．すなわち

$$m_H \leqq \left[\frac{8\sqrt{2}\pi}{3G_F}\right]^{1/2} \fallingdotseq 1 \text{ TeV} \tag{3.23}$$

ボルン近似は実数であるので，$|\text{Re } a_0| \leqq 1/2$ を考慮すれば，上の値はさらに改良されて～700 GeV となる．

また別の議論としては，ヒッグスが素粒子であると解釈できるためには少なくも $m_H > \Gamma_H$ が必要であると要求する．条件

$$\Gamma(H \to WW + ZZ) \sim \frac{3G_F m_H{}^3}{16\sqrt{2}\pi} < m_H \tag{3.24}$$

からは $m_H < 1.4$ TeV となる．しかし，このくらい質量が大きくなると $m_H{}^2 = 2\lambda v^2 = 2\lambda \times (250 \text{ GeV})^2$ であるので，λ が非常に大きくなること ($\lambda/4\pi \gtrsim O(1)$)

を意味する．つまり，ヒッグス粒子の自己相互作用は強い相互作用となるので摂動論を適用することに疑問がでる．オーダーとして 1TeV くらいよりは小さいであろうというに留まる．

b．トリヴィアリティ (triviality)

今度は別の観点，繰り込み群方程式からどのような上限が得られるかを調べてみよう．λ が大きい極限を議論するのであるから，(3.13) で λ 以外の他の結合定数の寄与を無視すれば，次の解が得られる．$Q_0=v$ として

$$\frac{1}{\lambda(v)}-\frac{1}{\lambda(Q)}=\frac{3}{4\pi^2}\ln\frac{Q^2}{v^2} \tag{3.25 a}$$

この式のもととなるヒッグスの方程式が摂動的処方で意味をもつためには，$\lambda(Q)$ は有限でなければならず，その場合は Q を大きくしていくと，$\lambda(v)=0$ となる．すなわち，ヒッグスの従う方程式は，相互作用のない自由場の理論でなければならない．このことをさして "無意味な (=trivial)" というのである．上式を書き直せば

$$\lambda(Q)=\frac{\lambda(v)}{1-\dfrac{3}{4\pi^2}\lambda(v)\ln\left(\dfrac{Q^2}{v^2}\right)} \tag{3.25 b}$$

であるから，十分大きい Q に対して分母が 0 となり (Landau pole)，λ は発散する．すなわち，Q の非常に大きいところでは摂動論が成立しない．このことは Q がある値 Λ を超えたところでは新現象が起きていることを示す．すなわち，ヒッグスの満たす方程式は，低エネルギー ($Q\lesssim\Lambda$) でのみ有効な "実効" 方程式と見なさなければならないことを示している．$Q\lesssim\Lambda$ で，$\lambda(Q)$ が有限である場合の $\lambda(v)$ 最大値は，(3.25 a) で $\lambda(Q)=\infty$ として得られるから，

$$m_H{}^2\leqq 2v^2\,\mathrm{Max}[\lambda(v)]=\frac{8\pi^2v^2}{3\ln(\Lambda^2/v^2)} \tag{3.26}$$

ここで，$\Lambda=M_{\mathrm{Planck}}\simeq10^{19}$ GeV という大きなエネルギースケールまで λ が有限でかつ小さいと要求すると，$m_H<150$ GeV を得る．この値は，$\lambda(Q)$ の設定の仕方にはほとんどよらない．$\lambda(Q)=\infty$ の代わりに $\lambda(Q)=1$ を使っても数値的にはほとんど同一である．このことは興味深い．もしエネルギーの高いところで大統一があるとし，そこまで何も新現象がないとすると，ヒッグスの質量は軽くなければならないことを意味する．後で議論する超対称理論はこれに

該当する．逆にいうと，ヒッグス粒子の質量が大きいときは新現象が比較的低いエネルギー領域に存在することを意味する．もし，比較的低いエネルギーで新現象が起きるとしても，ヒッグス粒子は存在するという条件，すなわち $m_H < \Lambda$ をつけると，$m_H \lesssim 800$ GeV となる．図 3.4 の横に走る曲線は，Λ の値を変えたときに，ヒッグス粒子の質量上限がどう変わるかを示している．真空の安定性とトリヴィアリティの議論からは，m_H の許される値は図で示す折れ線の下および左側であり，Λ をどこにとるかで変わる．$m_t = 175$ GeV とし，新現象は大統一スケールエネルギーまで存在しないという仮定を入れると 150 GeV $\lesssim m_H \lesssim 200$ GeV となり，ヒッグス粒子の質量に対する制限はかなりきついことがわかる．この値が放射補正から導いたヒッグス質量推定値とそれほど違わないのは興味深い．

これまでは，λ が大きいところでは新現象が起きるという設定で議論をしてきた．この仮定は正しいであろうか？ λ が大きくなるということは，単に摂動的取扱いが破綻するということであり，必ずしも新現象を意味しないかもしれない．この場合，$Q > \Lambda_{NT}$ で λ が大きくなって摂動論が破綻するとすれば，$\Lambda_{NT} < Q < \Lambda$ は，新現象は起きないが非摂動的取扱いが必要とされる領域である．このような領域があるかどうかは非摂動的手法の格子ゲージ理論で調べることができる．この場合は格子間隔が実質的な切断 Λ の役割を演じる．格子ゲージ理論の枠内で，上で行ったと同じ論理構成で計算をすると，ヒッグス粒子の質量上限は，$M_H < 750$ GeV という結果がでており[11]，どうやら $\Lambda_{NT} < Q < \Lambda$ という非摂動的取扱いの必要な領域は存在しない．すなわち，摂動論で扱った繰り込み群方程式の結論はそのまま信用してよさそうである．したがって，もしヒッグス粒子が質量 $\lesssim 1$ TeV で見つからなかったならば，標準理論を越える新しい新現象がそのへんのエネルギー領域で見つかるはずである．すなわち，ヒッグス粒子を発見するための作戦を練るときは，$m_H \lesssim 1$ TeV という条件を課してよい．ただし，$m_H \lesssim 1$ TeV はヒッグス質量の合理的な許容範囲の最大値であり，最適予想値ではない．Z^0 崩壊の精密データ解析，繰り込み群による予想では，ヒッグスの質量値は相当低いところにあるということを留意しておく必要がある．

以上の議論から，ヒッグスの質量の大小を問うことは，新現象のあり方に直

接関わる重要な設問であることがわかる．ヒッグスを発見し質量の値を決めることの重要な理由はここにある．他方においては，ヒッグスの生成機構や検出方法はヒッグスの質量に依存する．また $e\bar{e}$ コライダーかハドロンコライダーを使うかでも多少異なるので，以下は順を追ってヒッグスの検出法の解説をする．

3.3　ヒッグス粒子の生成

3.3.1　$e\bar{e}$ 反応による生成

a．$e\bar{e} \to HZ$

ヒッグス粒子の質量が小さければ（$<2m_Z$），

$$\sqrt{s}=m_Z \text{ で，} e^+e^- \to Z \to HZ^* \to Hl\bar{l} \qquad (Z^* \text{ は仮想粒子}) \qquad (3.27)$$

$$\sqrt{s}>m_Z \text{ ならば，} e^+e^- \to Z^* \to HZ \qquad (Z \text{ は実粒子}) \qquad (3.28)$$

が，検出に有利な崩壊モードである（図 3.6）．(3.28) の反応を Z によるヒッグスの制動放射という．(3.27) の崩壊率は小さいが，Z^0 共鳴では Z^0 粒子が多量につくられるので十分使えるチャネルとなる．微分崩壊率は[1,12]

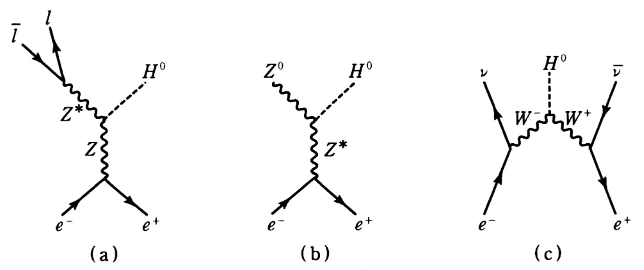
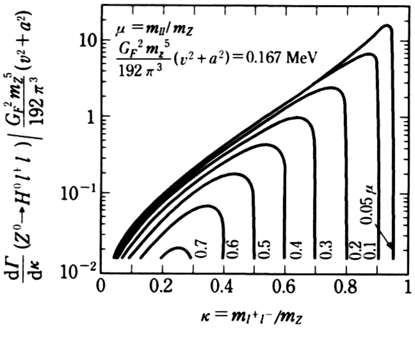


図 3.6　e^+e^- 反応におけるヒッグス粒子生成メカニズム（Z^* は仮想 Z）

(a)　$\sqrt{s}=m_Z$ では仮想 Z を仲介する．
　　$e^-e^+ \to H^0Z^* \to H^0l\bar{l}$
　　$m_H<60$ GeV のときに有効な方法である．

(b)　$m_Z<\sqrt{s}\lesssim 300$ GeV で使えるチャネルは $e^-e^+ \to H^0Z^0$ で $60<m_H\lesssim 100$ GeV のときに有効な方法である．

(c)　$\sqrt{s}>300$ GeV では，WW 融合による生成が優勢である．$m_H>100$ GeV のときに有効な方法である．



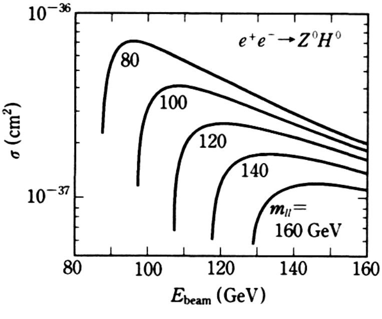


図 3.7 (a) $e^+e^- \to HZ^* \to Hl\bar{l}$ 生成断面積の $m(l^+l^-)$ 依存性.
$\sqrt{s}=m_Z$ であるので Z^* は仮想粒子である.
$\mu=m_H/m_Z$ を 0.05〜0.7 まで変えた. ヒッグス質量が大きくなると断面積は急速に小さくなる[12].
(b) $\sqrt{s}>m_Z$ での $e^+e^- \to HZ$ 生成断面積. Z は実粒子として生成される.

$$\frac{1}{\Gamma(Z \to \mu\bar{\mu})}\frac{d\Gamma}{dx}(Z \to Hl\bar{l}) = \frac{\alpha}{\pi \sin^2 2\theta_W}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{12}+\frac{2z^2}{3}\right)(x^2-4z^2)^{1/2}}{(x-z)^2}$$

$$x=\frac{2E_H}{m_Z}=\frac{m_H{}^2+m_Z{}^2-m_{ll}{}^2}{m_Z{}^2}, \qquad z=\frac{m_H}{m_Z} \tag{3.29}$$

x, z の範囲は, $2z \leqq x \leqq 1+z^2$ で与えられる. 分母の小さいところが崩壊率を大きくするから, m_{ll} はなるべく大きくなろうとし,

$$m_{ll} \sim 0.95(m_Z - m_H)$$

のところが極大になる (図 3.7 (a)). 原理的には $m_H < m_Z$ の範囲でのヒッグス粒子の探求が可能であるが, $m_H \to m_Z$ に近づくと生成率が急速に減少し, 多大のルミノシティが必要であることがこの図からわかる. LEPI ($\sqrt{s}=m_Z$) の実験では, この方法による検出でヒッグス粒子の質量値 $m_H < 60$ GeV の可能性は完全に除外されている[3]. $m_H > 60$ GeV のときは $Z^0 \to H\gamma$ の崩壊モードの方が $Hl\bar{l}$ モードより優勢となるが, 分岐比は 10^{-6} と小さいので, Z による制動放射反応を使う方が有利である.

b. Z による制動放射

LEP200 (LEP増強計画; $\sqrt{s}=200$ GeV) では $\sqrt{s}>m_Z$ であり, Z が H を制動放射する過程 (図3.6 (b)) が可能となる. 事象の識別は, $Z \to l\bar{l}$,

$q\bar{q}$(2-ジェット) の不変質量が Z に等しくなることを要求するか，$Z \to \nu\bar{\nu}$ のときは "見えないエネルギー$+H^0$ からの崩壊生成物であるジェットの一つ" を要求することによって得られる．ヒッグスの質量は運動量変数の再構築により計算できる．この断面積は次式で与えられる[13]．

$$\sigma = \frac{G_F{}^2 m_Z{}^4}{6\pi}[1-4x_W+8x_W{}^2]\frac{|\boldsymbol{k}|(|\boldsymbol{k}|^2+3m_Z{}^2)}{\sqrt{s}(s-m_Z{}^2)^2} \tag{3.30 a}$$

$$|\boldsymbol{k}| = \left[\frac{\{s-(m_H+m_Z)^2\}\{s-(m_H-m_Z)^2\}}{4s}\right]^{1/2} \tag{3.30 b}$$

$$x_W = \sin^2\theta_W$$

$|\boldsymbol{k}|$ は重心系でのヒッグス粒子の運動量である．この断面積はしきい値を超えると急速に立ち上がり，$\sqrt{s} = m_Z + \sqrt{2}m_H$ で最大となる．$\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{point}}(\mu\bar{\mu}) \sim 47/m_H(\text{GeV})$ くらいである (図 3.7 (b))．現在までの LEP II データでは，m_H が 89.8 GeV までは否定されているが，最終的には，$\sqrt{s} = 200$ GeV で積分ルミノシティ 150 pb^{-1} が集められれば，$m_H \lesssim 105$ GeV までならば発見できるであろうと見積られている[3,14]．

c．ボソン融合と等価 *W* 近似

$m_H > 100$ GeV を大きく超え，$\sqrt{s}$ も大きくなると，Z の制動放射よりはベクトルボソンによる融合 ($e^+e^- \to e^+e^- V^* V^* \to e^+e^- H$，$V=W$，$Z$：図 3.6 (c) の過程) が優勢となる (図 3.8)．

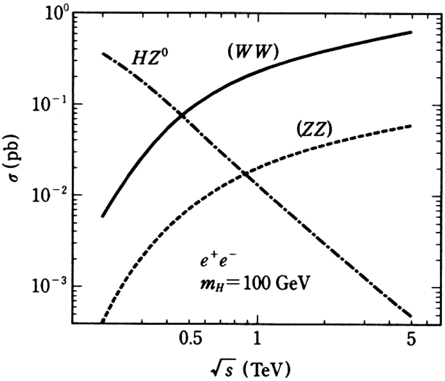


図 3.8 e^+e^- 反応でのヒッグス生成全断面積の依存性[15]
低エネルギーでは $e^+e^- \to HZ^0$ (一点鎖線) が優勢であるが，高エネルギーでは WW (実線)，ZZ (ダッシュ線) 融合反応が大きい．

ボソン融合生成に関しては，トリー近似で解析的に正確な式が求められているが[15]，直観的に理解しやすい等価 W 近似 (effective W approximation) の方法でもかなり精度のよい（誤差≲20%）式を与える．等価 W 近似の方法とはワイゼッカー-ウィリアムス近似の適用のことで，入射粒子のエネルギーが m_W に比べて十分高ければ，電子（またはクォーク）は W の雲を伴っていて，この W 同士が反応をしてヒッグス粒子を生成するという考え方のことである．この場合，電子もしくはクォークは反応には寄与しないで，単に W の供給源としての役割を果たす．W 放出に伴い現れる W の伝播関数 $\sim g^{\mu\nu}/(q^2-m_W{}^2)$ の極に一番近いところ $(q^2\simeq m_W{}^2)$ の運動変数領域の寄与が優勢であるとする近似であり，同様の考察は QCD の発展方程式を対数第1近似で導いたときにも行った（II-第5章参照)．すなわち等価 W 近似とは，関与するフェルミオンのエネルギーが W の質量に対して十分大きい場合，放出される仮想 W を実の粒子とみなし，かつ W 放出はほぼ前方に限られる $(\theta\fallingdotseq 0)$ とする近似である．等価 W 近似による WW のルミノシティは，WW 融合によるヒッグス粒子生成に限らず，他の WW 反応（例えば $WW\to WW$ 散乱）にも使えるなど応用範囲が広い．

それぞれエネルギー運動量 p_1, p_2 をもつ入射電子と陽電子が，x_1p_1，x_2p_2 の運動量をもつ2個の W を供給するとみなし，そのフラックスを $F(x_1)$，$F(x_2)$ とすれば，W 融合によるヒッグス生成の断面積 $\sigma(e^+e^-\to e^+e^-H)$ は，ベクトルボソン融合反応素過程の断面積 $\hat{\sigma}(VV\to H;\hat{s})$ を使って

$$\sigma(e^+e^-\to e^+e^-H;s)=\iint \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2F(x_1)F(x_2)\hat{\sigma}(VV\to H;\hat{s}) \tag{3.31 a}$$

$$\hat{s}=x_1x_2s \tag{3.31 b}$$

と書ける．$m_H{}^2\gg m_W{}^2$ とすれば，$\hat{\sigma}(VV\to H;\hat{s})$ は

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(VV\to H;\hat{s})&=\frac{16\pi^2m_H}{\hat{s}}\Gamma(H\to VV)\delta(\hat{s}-m_H{}^2)\\&=\frac{16\pi^2m_H}{\hat{s}^2}\Gamma(H\to VV)\tau\delta(x_1x_2-\tau)\end{aligned} \tag{3.32}$$

であるから，これを (3.31) に入れれば

$$\sigma(e^+e^-\to e^+e^-H)=\frac{16\pi^2m_H}{\hat{s}^2}\Gamma(H\to VV)\tau\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.33 a}$$

となる．ここに

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}=\int_\tau^1\frac{\mathrm{d}x}{x}F(x)F(\tau/x) \tag{3.34}$$

は，e^+e^- が提供する WW 反応のルミノシティである．(3.7) を入れて書き直すと，

$$\sigma(e^+e^-\to e^+e^-H)=\frac{\pi^2\alpha}{\sin^2\theta_W m_W{}^2}\tau\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.33 b}$$

となる．

運動量 p をもつ粒子 A が運動量 xp をもつ粒子 B と $(1-x)p$ をもつ粒子 C になるとき，放出される B の相対フラックスを求める方法は II-付録 C.6 に与えてある．すなわち

$$F(x)=\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{x(1-x)}{2}\sum_{\text{スピン}}\frac{|V(A\to BC)|^2}{[p_T{}^2+(1-x)m_W{}^2]^2}dp_T{}^2 \tag{3.35}$$

を計算すればよい．この式は，$p_T{}^2\to p_T{}^2+(1-x)m_W{}^2$ の分だけ (II-(C.34)) と異なる．これは，W が質量をもつため，パートンエネルギー $(xp+p_T{}^2/2xp)$ を $(xp+(p_T{}^2+m_W{}^2)/2xp)$ と変更したためである．(3.35) の中に具体的に $(e\to e+W)$ のラグランジアンを代入すれば

$$g^2|\overline{\sum}V(A\to BC)|^2=\overline{\sum_{\text{スピン}}}|\bar{u}(p_c)\not{\varepsilon}(g_V+g_A\gamma^5)u(p_A)|^2 \tag{3.36 a}$$

ただし，g_V と g_A は W, Z の場合で異なる．

$$W\text{ 粒子}：g_V=-g_A=\frac{g_W}{2\sqrt{2}}=\frac{e}{2\sqrt{2}s_W} \tag{3.36 b}$$

$$Z\text{ 粒子}：g_V=g_Z\left(\frac{I_3}{2}-Qs_W{}^2\right),\quad g_A=-\frac{g_Z}{2}I_3 \tag{3.36 c}$$

$$g_Z=\frac{e}{s_Wc_W},\quad s_W=\sin\theta_W,\quad c_W=\cos\theta_W \tag{3.36 d}$$

を計算すれば，横偏極（の平均）および縦偏極のボソンに対して[16)]

$$F_T(x)=\frac{(g_V{}^2+g_A{}^2)}{8\pi^2}\frac{1+(1-x)^2}{x}\ln\left[\frac{\hat{s}}{m_W{}^2}\right] \tag{3.37 a}$$

$$F_L(x)=\frac{(g_V{}^2+g_A{}^2)}{4\pi^2}\frac{(1-x)}{x} \tag{3.37 b}$$

を得る．ただし，$\hat{s}\gg m_W{}^2$ とした．横偏極 W のルミノシティは，$(g_V{}^2+g_A{}^2)/$

$(4\pi)\to\alpha$ と置き換えれば，電子が与えるフォトンフラックスのワイゼッカー-ウィリアムスの式 (II-(C.38)) になる．(3.34) を使って，横，縦偏極の VV $(V=W, Z)$ 反応のルミノシティを計算すると

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\right|_{ee/V_TV_T}=\left[\frac{(g_V{}^2+g_A{}^2)}{8\pi^2}\right]^2\left[\ln\left(\frac{\hat{s}}{m_W{}^2}\right)\right]^2 \times\frac{1}{\tau}\left[(2+\tau)^2\ln\frac{1}{\tau}-2(1-\tau)(3+\tau)\right] \tag{3.38 a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\right|_{ee/V_LV_L}=\left[\frac{(g_V{}^2+g_A{}^2)}{4\pi^2}\right]^2\frac{1}{\tau}\left[(1+\tau)\ln\frac{1}{\tau}-2(1-\tau)\right] \tag{3.38 b}$$

WW のルミノシティを図 3.9 に示す[17]．e^+e^- コライダーでは，等価 ZZ のルミノシティは WW に比べるとずっと小さく無視してよい．これは，Z と電子の結合が小さくほとんど 0 であることに起因する．また，横偏極 W のルミノシティが縦偏極に比べて大きいが，これは $[\ln(\hat{s}/m_W{}^2)]^2$ の因子による．すなわち

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(W_T)\gg\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(W_L) \tag{3.39}$$

これは W が質量 0 のフェルミオンに供給される過程に特有な状況である．なぜなら，縦偏極ベクトルは W の進行方向を z 軸にとる座標系では

$$\varepsilon_{/\!/}{}^{\mu}=\frac{1}{m_W}(|\boldsymbol{k}|;0,0,\omega)=\frac{k^{\mu}}{m_W}-\frac{m_W}{\omega+|\boldsymbol{k}|}(1;0,0,-1) \tag{3.40}$$

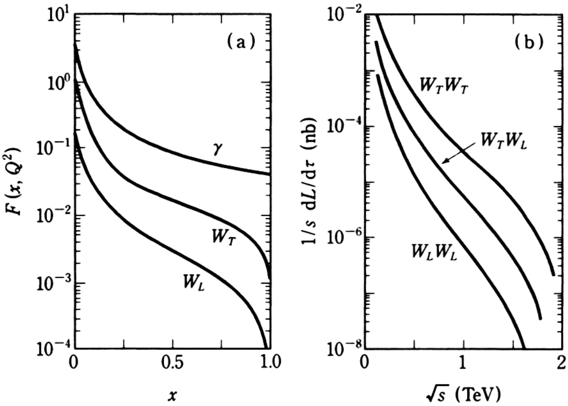


図 3.9 $\sqrt{s}=2$ TeV e^+e^- コライダーにおける WW 反応のルミノシティ（等価 W 近似）[17]
(a) 1 個の電子の提供する γ, W_T（横偏極），W_L（縦偏極）のフラックス $x=p_W/p_e$
(b) WW 反応のルミノシティ．$\sqrt{s}$ 依存性．

となり，第1項は質量0のフェルミオンカレントを掛けると0となる．このため通常は縦偏極による成分は増大因子（$\sim\omega/m_W$）となるのに，質量0のフェルミオンに結合する場合は抑圧因子（$\sim m_W/\omega$）となるのである．しかし，縦偏極 W による H 生成断面積が，横偏極 W による断面積よりもっと大きく（$\Gamma_L/\Gamma_T\sim(\varepsilon_L\cdot\varepsilon_L)^2/(\varepsilon_T\cdot\varepsilon_T)^2\sim(m_H^2/m_W^2)^2$），ルミノシティが小さい分を補ってあまりあるので，全体として縦偏極 W による生成断面積が優勢となる．

縦偏極の WW フラックスを (3.33b) に入れれば，ヒッグス生成断面積

$$\sigma(e^+e^-\rightarrow e^+e^-H)=\frac{1}{16m_W^2}\left(\frac{\alpha}{\sin^2\theta_W}\right)^3\left[(1+\tau)\ln\frac{1}{\tau}-2(1-\tau)\right] \qquad (3.41)$$

を得る[18)]．

d. 横運動量分布

k_T 分布を求めるには，式 (3.35) までさかのぼる．ヒッグス粒子の横運動量を $\boldsymbol{k}_T$ とすると，

$$\boldsymbol{k}_T=\boldsymbol{p}_{T1}+\boldsymbol{p}_{T2} \qquad (3.42)$$

であるから，$d^2p_{T1}d^2p_{T2}\rightarrow d^2k_Td^2p_{T2}$ として，p_{T2} について積分すれば k_T についての分布が得られる．図3.10に $\sqrt{s}=2$ TeV，$m_H=200$ GeV の場合について，ヒッグス粒子生成断面積の k_T 依存性を正確な解析式を用いた場合と，等価 W 近似の場合についてプロットする[19)]．W の伝播関数の影響で，$|\boldsymbol{p}_{T1}|^2$，$|\boldsymbol{p}_{T2}|^2\fallingdotseq m_W^2$ の寄与が大部分を占めるから，ヒッグス粒子の横運動量もまた m_W 程度であり（$\langle\boldsymbol{k}_T^2\rangle\fallingdotseq m_W^2$），図3.10の分布はその事実を反映している．等価 W 近似は $O(m_W^2/s)$ を無視する近似であるので，s の大きいほど近似がよくなる．$\sqrt{s}>10$ TeV，$m_H>300$ GeV では精度は5%くらいにおさまる．

3.3.2 ハドロンによるヒッグス生成

$e\bar{e}$ コライダーによるヒッグス生成はバックグラウンドが小さくクリーンな信号が得られやすい．$Z\rightarrow l\bar{l}$ はもちろんのこと，$Z\rightarrow q\bar{q}$ でもほぼバックグラウンドから分離することは可能である．したがって，$e\bar{e}$ コライダーでヒッグス粒子の生成が行われるのが望ましいが，LEP 200 での発見能力は $m_H\lesssim$ 100 GeV に限られる．$m_H>100$ GeV のヒッグスを探求するには，$\sqrt{s}>200$ GeV の e^+e^- コライダーを建設するのが望ましいが，近い将来に実現が可能な

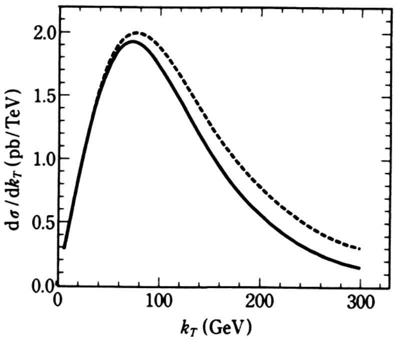


図 3.10 e^+e^- 反応から，WW 融合によるヒッグス粒子生成断面積の横運動量分布[19)]
実線：正確な解析式，ダッシュ線：等価 W 近似
$\sqrt{s}=2$ TeV，$m_H=200$ GeV

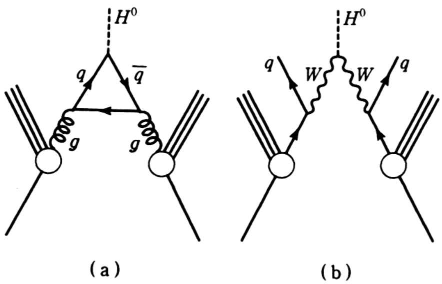


図 3.11 ハドロン反応におけるヒッグス生成メカニズム
(a) グルーオン融合
(b) WW (ZZ) 融合，$\sqrt{s}$，m_H の大きいところでは (b) が優勢となる．

のはハドロンコライダー LHC[*2)] であるので，以下はハドロンコライダーでのヒッグス検出法を述べる．ハドロンコライダーでのヒッグス生成は，m_H の小さいところではグルーオン融合 (図 3.11 (a))，s およびヒッグス質量の大きいところでは W 融合 (図 3.11 (b)) が主過程となる．LHC では m_H が 900 GeV～1 TeV が境目となる．

a. グルーオン融合

ハドロン反応による H 生成の断面積は，ハドロンの中のグルーオン分布関数を $g(x)$ として次式で与えられる[20)]．

$$\sigma(pp\to ppH)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{64}\times\frac{16\pi^2}{{m_H}^3}\Gamma(H\to gg)\tau\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.43 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}=\int\mathrm{d}x_1\int\mathrm{d}x_2\delta(x_1x_2-\tau)g(x_1)g(x_2) \tag{3.43 b}$$

式 (3.33) と比較するとき，(3.43a) の前にある 1/4, 1/64 はグルーオンによるスピンおよびカラー因子であり，その前の 2 は同一粒子であることによる統計因子である．$H\to gg$ の過程は

---

*2) LHC (Large Hadron Collider) は CERN (欧州原子核研究機構) にある稼働中の LEP (e^-e^+ コライダー，周囲 22 km) トンネルを流用する pp コライダー計画．超伝導磁石を使って，8 テスラ，$\sqrt{s}=14$ TeV を実現し，ルミノシティは 10^{34}/cm^2/sec をめざす．稼働開始は 2005 年と予定されている．

$$\Gamma(H\to gg)=\frac{\sqrt{2}G_F[\alpha_s(m_H)]^2}{8\pi^3}\frac{m_H{}^3}{9}|I|^2 \tag{3.44}$$

と計算できるが，これは実効的には現象論的ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{Hgg}=-(\sqrt{2}G_F)^{1/2}\frac{\alpha_s(m_H)}{12\pi}|I|^2 G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\varphi \tag{3.45}$$

から導けるとしてよい．ただし，I はフェルミオンループの計算から現れる量で

$$I=\sum_j I_j=\sum_j 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\frac{1-4xy}{1-xy(m_H{}^2/m_j{}^2)-i\varepsilon} \tag{3.46}$$

I_j の値を $\lambda_j=m_j/m_H$ の関数として図 3.12 に示す．I の値は実際的には一番重いフェルミオン，すなわちトップクォークの質量により影響される．$|I|^2$ は $\lambda_j \simeq 0.4$ で最大値～3.2 になり，$\lambda_j \gtrsim 1$ で $I \fallingdotseq 1$ となる．$\lambda_j \ll 1$ では，$|I|^2 \propto \lambda_j{}^4$ である．すなわち，$m_H \gg m_t$ では $\sigma_{\mathrm{eff}} \propto \lambda_j{}^4 \sim 1/m_H{}^4$ で減衰することがわかる．

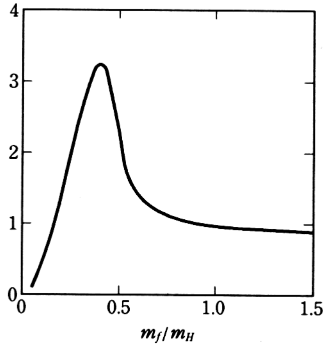


図 3.12　$gg\to H$ に現れるループ関数 $I(\lambda)$，$\lambda=m_f/m_H$
m_f はループをつくるフェルミオンの質量．図には $|I|^2$ を描いてある．

b．*WW* 融合

ハドロンからの WW 融合による生成断面積は，$\sigma(e\bar{e}\to e\bar{e}H)$ の式 (3.31) で電子変数をクォーク変数に置き換えたものに，クォークルミノシティを掛けて得られる[16]．ハドロン衝突での W_TW_T，W_LW_L 反応のルミノシティは，ハドロン中のパートン分布関数を $f_i(x)$ とすれば

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\right|_{pp/VV}=\sum_{ij}\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 f_i(x_1)f_j(x_2)\times\left[\int \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta F(\xi)F(\eta)\delta(x_1\xi x_2\eta-\tau)\right] \tag{3.47 a}$$

で与えられるから，$x_1x_2=\tau'$ とおくと［…］の中は

$$\frac{1}{\tau'}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}F(x)F\left(\frac{\tau/\tau'}{x}\right)=\frac{1}{\tau'}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\tau/\tau'}\equiv\frac{1}{\tau'}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{qq/VV} \tag{3.47 b}$$

となるので，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{pp/VV}=\sum_{ij}\int_\tau^1\frac{\mathrm{d}\tau'}{\tau'}\int_\tau^1\frac{\mathrm{d}x}{x}f_i(x)f_j\left(\frac{\tau'}{x}\right)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{qq/VV} \tag{3.48 a}$$

したがって，断面積は

$$\sigma(pp\to VV\to H;s)=\int_\tau^1\mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{pp/VV}\hat{\sigma}(VV\to H;\tau s) \tag{3.48 b}$$

で与えられる．ただし，$\hat{\sigma}(VV\to H)$, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}\xi|_{qq/VV}$ は，電子衝突での変数からしかるべきクォーク衝突での変数に置き換えるものとする．W 融合による生成断面積の $m_H{}^2$ による減少率はグルーオン融合に比べてずっと緩やかであるので，s, m_H の大きいところでは WW 融合による生成が大きくなる．ただし，トップクォークの質量が大きいほど WW 融合が優勢になる m_H の値は大きくなる．$m_t\fallingdotseq 175$ GeV を入れると，LHC（$\sqrt{s}=14$TeV）ではほぼ全領域で gg 融合が優勢である．図 3.13 にグルーオン融合および W 融合によるヒッグス生成断面積を示す[21]．

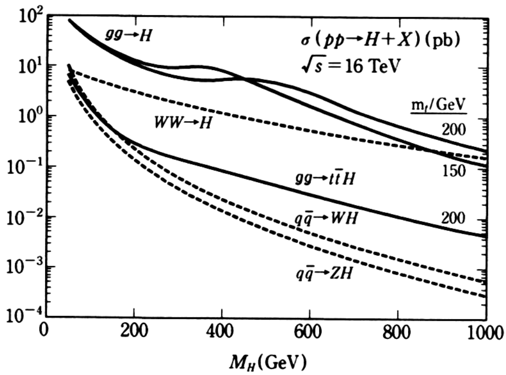


図 3.13 ハドロンコライダー LHC（$\sqrt{s}=16$TeV）におけるヒッグス粒子生成断面積[21]
(a) 実線：グルーオン融合，(b) ダッシュ線：$WW(ZZ)$ 融合，(c) 点線：$t\bar{t}$ 融合
この計算は t クォーク発見以前になされたので $m_t=150$，200 GeV となっている．

c. ヒッグス粒子検出の信号

$e\bar{e}$ 反応によるヒッグスの生成においては雑音信号が少なく，十分な信号数さえ得られれば，$H\to jj$（j=ジェット），ll によってヒッグスを同定するのは

比較的容易である．ZH の2体生成では，Z を同定するだけでも H の不変質量の決定が可能である．一方，ハドロン生成の場合はQCDによる雑音信号が大きく，信号検出にはヒッグスの質量による崩壊分岐比の変化などを考慮して最良の信号対雑音比が得られるような工夫が必要である．よって，ここではハドロンコライダーにおけるヒッグス検出の方法を議論する．

LHCの目標ルミノシティ ($L=10^{34}/\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$) が実現できれば，1年間（実際に運転できる時間を 10^7 sec と仮定する）で，$\int L=10^{41}/\mathrm{cm}^2=10^5\,\mathrm{pb}^{-1}$ のルミノシティが得られる．断面積1pbに対し約 10^5 個のヒッグス粒子が生成できる．この数が十分かどうかを以下検討しよう．ヒッグスの崩壊モードが質量により異なるので（図3.2 (b)），検出方法もまた質量により異なる．$m_H<100$ GeV ならば，LEP200 で見つけられるので，$m_H>100$ GeV の場合を以下に考慮する．

i）100 GeV $<m_H<$ 130 GeV　$m_H<2\,m_W$ 以下では，$b\bar{b}$ 崩壊モードが主となるが，QCDバックグラウンドが大きいのでこのモードは使えない．図3.2 (b) を眺めれば，$H\to\gamma\gamma$ モードの分岐比が $\sim10^{-3}$ あり使えそうである．すなわち，下記の包含反応

$$pp \longrightarrow H+X,\quad H \longrightarrow \gamma\gamma$$

で，2個の γ を捕まえて不変質量 $M_{\gamma\gamma}$ を組み，ヒッグス質量に相当する鋭い山を見つけることによりヒッグス粒子を同定する．しかし，2個の γ のみを信号とするのでは，QCDによる $\gamma\gamma$ 生成，QCDジェットの γ 誤認による大きな雑音信号があり，エネルギー分解能のよい γ 検出器（電磁カロリメター）を使用する必要がある[22]．一方，$q\bar{q}\to WHX$，$t\bar{t}HX$ などの W や $t\bar{t}$ 対を伴う生成反応を使い，W または $t\bar{t}$ から出る孤立レプトンを標識として使うモードを使えば雑音の少ないきれいな信号が得られるが[23]，この場合は十分な数が得られるかが問題である．LHC の実験グループ ATLAS と CMS*[3] は，これらのモードで，ヒッグスの質量が 80～130 GeV までの範囲ならば検出可能としている[24]．

ii）130 GeV＜m_H＜800 GeV　ヒッグス粒子の質量が m_Z の2倍以上であれば，主たる崩壊モードは WW および ZZ である．W, Z のハドロンへの崩壊モードは大きな断面積をもつQCDジェットから分離するのがむずかしいが，最終状態に4個の荷電レプトンの存在する崩壊モードを使えば最もきれいな信号が得られる[22]．このモードは通常黄金事象 (gold plated events) と呼ばれる．

$$p+p \longrightarrow H+X$$
$$\hookrightarrow Z+Z \to e^+e^-/\mu^+\mu^- + e^+e^-/\mu^+\mu^- \qquad (3.49)$$

このモードへの崩壊分岐比は 1.1×10^{-3} であるので，信号数は大きくないが，2組のレプトン対の不変質量 $m(l\bar{l})\simeq m_Z$ を要求することにより偽信号を大幅に落とせるのが強みである．バックグラウンドの主要成分は，$q\bar{q}$ または $gg \to ZZ$ の連続スペクトル生成，$Zb\bar{b}$，$Zt\bar{t}$ 生成によるものなどである．図3.14 (a) に，CMS グループの予想獲得信号図を示す[24]．$4l$ モードの検出では，m_H＜800 GeV が検出限界とされている．それは，信号数が少ないという事実に加えて，m_H＞800 GeV では，幅 Γ_H が＞250 GeV と非常に大きくなり，共鳴は鋭い山ではなく緩やかな盛り上がり程度にしかならないので，確固とした共鳴が見つけにくくなるという事情による．また，このような幅の広い共鳴を素粒子と呼べるかという理論上の問題も存在する．

$m_H<2m_Z$ であっても，$H\to ZZ^*\to 4l$（Z^* は仮想 Z）により，4個のレプトン崩壊は可能である．ただし分岐比が急速に減少するので，$2m_Z$ よりは低いところまでいくが，130 GeV 程度が検出可能な質量下限となる．

iii）700 GeV＜m_H≃1 TeV　m_H の大きいところでは，検出器の密閉性が十分であれば（ラピディティ η の十分大きなところまでエネルギーベクトルが測定可という条件）見えない運動量を利用してニュートリノへの崩壊モード検証も可能となる．この場合，H の信号は，横運動量分布のジャコビアン頂

---

*3)　ATLAS＝A Troidal Lhc Apparatus，内（外径）が 5 (10) m，長さ 26 m の空芯で，0.8 テスラの超大磁場（中心部は 2 テスラ）をもち，液体アルゴンカロリメターを使う大型の汎用測定器．全体のサイズは $20\phi\times44$ m で，重量は 6000 t．
CMS＝Compact Muon Solenoid：コイルは $3\ \mathrm{m}\phi\times14$ m，4 テスラ，結晶カロリメターを使う．全体サイズは，14×20 m，12000 t．名前が示すようにミューオン検出能力を強調したデザインである．

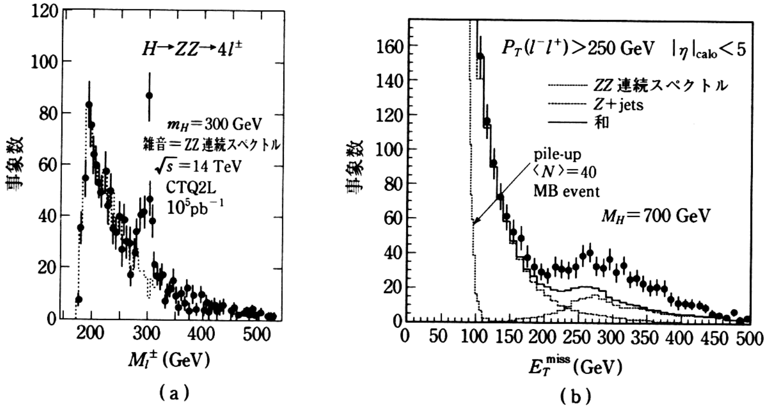


図 3.14　LHC におけるヒッグス生成信号シミュレーション[24)]
(a)　m_H=300 GeV, $H^0 \to ZZ \to 4l^{\pm}$ (CMS)
(b)　m_H=700 GeV, $H^0 \to ZZ \to l^+l^-\nu\bar{\nu}$ (ATLAS)

上[*4)]として現れる．図 3.14 (b) に，2 個のレプトンの存在を要求し適当な切断条件をつけた後の見えない横運動量分布の ATLAS グループの予想を示す[24)]．m_H が 1TeV に近いところでは，幅が大きくなること，不変質量分布を組めないことなどの理由で，ヒッグスの存在は雑音信号を上回る過剰の事象数という形で現れるので，雑音信号の理解が重要となる．

まとめると，標準モデルにおけるヒッグス粒子は，100 GeV $\lesssim m_H \lesssim$ 1 TeV であれば LHC で探索可能とみなされている．

3.4　超対称ヒッグス

3.4.1　ヒッグスモデルの拡張

標準理論の枠内におけるヒッグス粒子の性質は，種々の可能性のうちで最も簡単な構造を与えるという理由で選ばれた最小モデルである．現在までのところ，この選択で実験事実との矛盾は起きていない．また最小モデルは，対称の自発的破れに対する原因や性質を探り，ヒッグス粒子を発見するための実験を計画する上での貴重な指針を与えてもきた．しかし，大統一理論などを視野に

*4)　運動変数（この場合 p_T）の限界値でスペクトルが切断される結果現れる山．

おいて，より一般的なモデルの可能性を検討しておくことは大切である．標準モデルを拡張する場合に考慮すべき制約として，二つの観測事実［(1) $\rho=m_W{}^2/m_Z{}^2\cos^2\theta_W\fallingdotseq 1$，(2) 香りを変える中性カレントの不在］を考慮する必要がある．(1) の条件は，ヒッグスが 2 重項である限りはいくつあっても自動的に満たされるので（式 (1.16) を参照），最も簡単な拡張はヒッグス 2 重項が二つ (ϕ_1, ϕ_2) あるとすることである．また，超対称理論（後述，第 5 章）では，2 個の 2 重項ヒッグスの存在が最小必要条件であることからも，2 個の 2 重項モデルの検討の価値はある．余分のヒッグス 2 重項を付加する場合に，(2) の条件を満たす処方はいくつかあるが，通常は，$Q=2/3$ のアップクォーク (u, c, t) と $Q=-1/3$ のダウンクォーク (d, s, b) に別々のヒッグスを結合させることで実現させている．

a．超対称ヒッグスポテンシャル

標準モデルの拡張選択肢はたくさんあるが，以下の議論では超対称を取り入れることとし，その中でも最も簡単な MSSM モデル (minimum supersymmetric standard model) に限ることにする．超対称を要求すると，例えばヒッグスの自己結合定数がゲージ結合定数と関係がつくなど種々の制限がつき，予言能力が増す．MSSM では，標準モデルのヒッグス ϕ_{SM} とその荷電共役 $\phi_{SM}{}^c$ と同じ量子数（超電荷 $Y=1, -1$）をもつ二つのヒッグス 2 重項 H_1, H_2 が必要である．超対称性についての議論は後の章にゆずることにし，ここでは，MSSM でのヒッグスポテンシャル[1] は与えられたものとして議論する．

$$V=\mu_1{}^2H_1{}^\dagger H_1+\mu_2{}^2H_2{}^\dagger H_2-\mu_3{}^2(\varepsilon_{ij}H_1{}^iH_2{}^j+\mathrm{h.c.})$$
$$+\frac{(g_W{}^2+g_B{}^2)}{8}(H_1{}^\dagger H_1-H_2{}^\dagger H_2)^2+\frac{1}{2}g_W{}^2|H_1{}^\dagger H_2|^2 \tag{3.50}$$

二つのヒッグスは混合するので，後の議論のために量子数を揃えた表示を導入しておくと便利である．$\phi_1=H_1$，$\phi_2=H_2{}^c$ とし，$\phi_1{}^0$，$\phi_1{}^\pm$，$\phi_2{}^0$，$\phi_2{}^\pm$ を次式で定義する．

$$H_1=\begin{bmatrix}H_1{}^1\\H_1{}^2\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\phi_1{}^+\\\phi_1{}^0\end{bmatrix} \tag{3.51 a}$$

$$H_2=\begin{bmatrix}H_2{}^1\\H_2{}^2\end{bmatrix}\equiv\phi_2{}^c=\begin{bmatrix}\phi_2{}^{0\dagger}\\-\phi_2{}^-\end{bmatrix} \tag{3.51 b}$$

ポテンシャルの最小値は，

$$\langle\phi_1\rangle=\begin{bmatrix}0\\v_1\end{bmatrix},\qquad \langle\phi_2\rangle=\begin{bmatrix}0\\v_2\end{bmatrix} \tag{3.52}$$

にある[*5)]．ϕ_1 が d クォークとレプトンに，ϕ_2 が u クォークに結合するものとする．

b．質　　量

対称性が自発的に破れると質量行列が生じるが，CP 保存により，中性ヒッグスの実数部と虚数部が混じることはなく，また荷電ヒッグスも分離する．質量行列を対角化することにより次の 5 種のヒッグス粒子が発生する．

$$H^{\pm}=-\phi_1^{\pm}\sin\beta+\phi_2^{\pm}\cos\beta \tag{3.53 a}$$

$$A^0=\sqrt{2}[-\mathrm{Im}\phi_1^0\sin\beta+\mathrm{Im}\phi_2^0\cos\beta] \tag{3.53 b}$$

$$H^0=\sqrt{2}[(\mathrm{Re}\phi_1^0-v_1)\cos\alpha+(\mathrm{Re}\phi_2^0-v_2)\sin\alpha] \tag{3.53 c}$$

$$h^0=\sqrt{2}[-(\mathrm{Re}\phi_1^0-v_1)\sin\alpha+(\mathrm{Re}\phi_2^0-v_2)\cos\alpha] \tag{3.53 d}$$

ここに

$$\tan\beta=v_2/v_1 \tag{3.54}$$

で定義される．$v^2=v_1^2+v_2^2$ は，$m_W{}^2=g_W{}^2v^2$ によって固定される．α は CP が正の中性ヒッグスの質量行列を対角化する際の混合角である．質量が大きい方を H^0，小さい方を h^0 と書くのが慣例である．$H^{\pm}, A^0$ に直交する成分は，ゴールドストーンボソンとして，$W^{\pm}, Z^0$ の縦波成分に吸収される．A^0 は CP が負，H^0, h^0 は CP が正のボソンである．まず，CP が負の中性ヒッグス A^0 の質量は

$$m_A{}^2=\mu_3{}^2(\cot\beta+\tan\beta) \tag{3.55}$$

となることが示せる．しかし，話をヒッグスセクターに限定した場合，MSSM モデルでは独立な二つのパラメターは二つしかないので，以下では，$\tan\beta$ と m_A を独立変数にとることとする[*6)]．荷電ヒッグス $H^{\pm}$ の質量は

---

*5) 通常は，$\langle\phi^0\rangle=v/\sqrt{2}$ で定義する．ここでの定義は以下の計算式を簡略化するためで，特別な意味はない．

*6) 超対称条件を課さず，2 重項を 2 個入れる場合の一般のモデルでは，$\tan\beta, m_A{}^2$ に加えて，$m_{H^{\pm}}{}^2, m_{h0}{}^2, m_{H0}{}^2$ および混合角 α の 6 個が独立なパラメターとなる．(3.53) の混合の式，表 3.1，3.2 の結合定数の関係式は一般の場合でも成立する．

$$m_{H^\pm}{}^2 = m_A{}^2 + m_W{}^2 \tag{3.56}$$

で与えられる．H^0, h^0 の質量行列を求めるには，ヒッグスのポテンシャル V で，$\phi_1{}^0 = v_1$, $\phi_2{}^0 = v_2$, $\phi_1{}^\pm = \phi_2{}^\pm = 0$ とおき，$\partial V/\partial v_i = 0$ の条件のもとで，$\partial^2 V/\partial v_i \partial v_j$ を求めればよい．結果は

$$\mathcal{M}_{CP+}{}^2 = \begin{bmatrix} m_A{}^2 \sin^2\beta + m_Z{}^2 \cos^2\beta, & -\dfrac{m_A{}^2 + m_Z{}^2}{2} \sin 2\beta \\ -\dfrac{m_A{}^2 + m_Z{}^2}{2} \sin 2\beta, & m_A{}^2 \cos^2\beta + m_Z{}^2 \sin^2\beta \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

であり，これを対角化して

$$m_{H,h}{}^2 = \frac{1}{2}\left[m_A{}^2 + m_Z{}^2 \pm \sqrt{(m_A{}^2 + m_Z{}^2)^2 - 4 m_Z{}^2 m_A{}^2 \cos^2 2\beta}\,\right] \tag{3.58}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{m_A{}^2 + m_Z{}^2}{m_A{}^2 - m_Z{}^2} \tan 2\beta, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq 0 \tag{3.59}$$

を得る．これらの質量関係式より，

$$\begin{aligned} &m_H{}^\pm > m_W \\ &m_H > m_Z \geqq \mathrm{Min}(m_Z, m_A) \cos 2\beta \geqq m_h \\ &m_h{}^2 + m_H{}^2 = m_Z{}^2 + m_A{}^2 \end{aligned} \tag{3.60}$$

が導ける．すなわち，中性ヒッグス粒子の少なくも 1 個は，Z より軽い質量をもつので，$m_h < m_Z$ の軽いヒッグス h^0 の存在を検証できれば，超対称モデル（少なくも最小限拡張モデル MSSM に関しては）の存在の可能性が大きくなる．ただし，これらの条件はトリーレベルでのみ成立する話である．放射補正を入れると，質量の大きいトップなどの寄与が無視できなくて，$m_h{}^2$ の値が変化する[25]．

$$\delta m_h{}^2 \fallingdotseq \frac{3\alpha}{2\pi \sin^2\theta_W}\left(\frac{m_t{}^4}{m_W{}^2}\right)\ln\left(\frac{m^2(\tilde{t}\,)}{m_t{}^2}\right) \tag{3.61}$$

$\tilde{t}$ は t のパートナーの超対称（SUSY）粒子である．この結果 m_h の値は，必ずしも m_Z や m_A より軽いとは限らなくなる．例えば，$m_t = 140$ GeV, $m(\tilde{t}\,) = 1$ TeV にとると $m_h \simeq 120$ GeV となる．図 3.15 (a) に，ヒッグス質量 m_h を，m_A の関数として種々の $\tan\beta$ の値に対して示す．これから，放射補正を入れても $m_h \lesssim 130 \sim 150$ GeV におさまることがいえる．軽いヒッグス粒子の存在は超対称理論の特徴である．

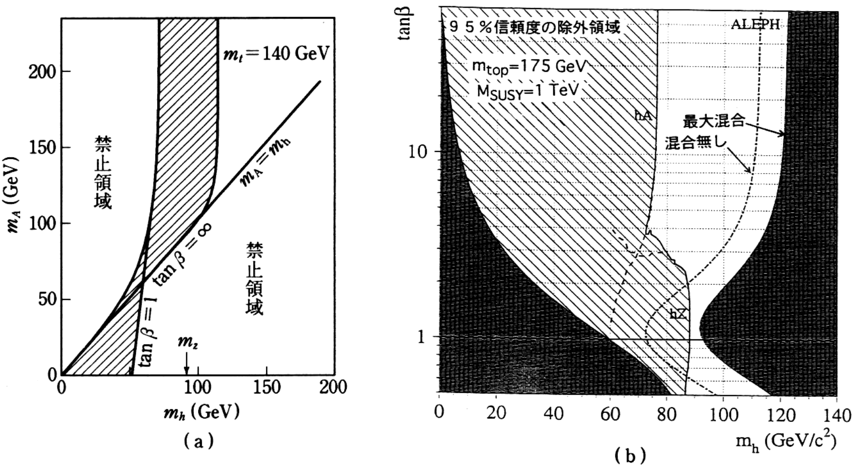


図 3.15　MSSM で許される m_h-m_A の範囲

(a)　トリー近似では，$m_h < m_A$，$m_h < m_Z$ のみが許されるが，放射補正を入れると斜影部分が許容範囲となる[25]．
$\tan\beta = v_2/v_1$ は，ヒッグスの二つの真空期待値の比．
パラメター $m(\tilde{t})$=1 TeV，m_t=140 GeV は固定．

(b)　LEP における ALEPH の実験結果[26]．
灰色部分は理論的に禁止される．斜線でハッチをつけたところが $e^+e^- \to h^0A$，$e^+e^- \to h^0Z$ 反応より 95%信頼度でデータから除外される領域．

3.4.2　MSSM ヒッグス粒子の検出

a.　相 互 作 用

ヒッグスとベクトルボソンやフェルミオンとの相互作用は，(3.53) を使って書き直すことにより一義的に決まるが，全部書き下ろすのは煩雑であるので一部を表 3.1～3.3 に掲げる．φ_{SM} は標準モデルにおけるヒッグスをさす．

表 3.1　中性ヒッグスとフェルミオンの結合定数 O_i：$-\frac{g_W m_f}{2m_W}\bar{f}O_i f\phi_i$

h^0	H^0	A^0	φ_{SM}	
$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$-i\gamma^5\cot\beta$	1	$f=t$
$-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	$-i\gamma^5\tan\beta$	1	$f=b$

表 3.2　中性ヒッグスとベクトル粒子の結合 O_i：
$ig_V m_V O_i g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \phi_i$
$(g_W = e/\sin\theta_W,\ g_Z = e/\sin\theta_W \cos\theta_W)$

h^0	H^0	A^0	φ_{SM}
$-\sin(\alpha-\beta)$	$\cos(\alpha-\beta)$	0	1

中性ヒッグスとベクトル粒子の結合：
$V\phi(p)\phi(p') = (g_Z/2)(p-p')^\mu Z_\mu A^0 \phi_i$

h^0	H^0	φ_{SM}
$\cos(\alpha-\beta)$	$-\sin(\alpha-\beta)$	0

同上（続き）：$-i(g_W/2)(p-p')^\mu$
$W_\mu{}^\pm H^\mp \phi_i$

h^0	H^0	φ_{SM}
$\cos(\alpha-\beta)$	$\sin(\alpha-\beta)$	0

また，$H^\pm$ とフェルミオンとの結合は

$$\frac{g_W}{2\sqrt{2}m_W}\bar{t}[m_t \cot\beta(1-\gamma^5) + m_b \tan\beta(1+\gamma^5)]bH^+ + \text{h.c.} \tag{3.62}$$

で表される．この式は t, b で書いたが，一般のフェルミオン 2 重項についても同様な式が成立する．

許される結合と禁止される結合の一部を下に書き下ろす．ただし，これはトリー結合で成立する話で，フェルミオンループを入れた高次補正を考慮すればこの限りではない．$V=\gamma$, $W^\pm$, Z として

○；[VVH^0, VVh^0], [ZA^0H^0, ZA^0h^0], ZH^+H^-, [$W^\pm H^\mp H^0$, $W^\pm H^\mp h^0$], [ZZH^0, ZZh^0]

×；VVA^0, $ZW^\pm H^\mp$, ZH^0h^0, ZH^0H^0, Zh^0h^0, ZA^0A^0

括弧 [··] 内の結合は，[$\sin x$, $\cos x$] のように片方が小さいときは他方が大きいという相補的な関係にある．これらの相補性はユニタリティと関係がある．自発的に対称性の破れた理論では，ヒッグスを含む過程が発散積分を正しく相殺する役目を担う．例えば，H^0 と h^0 を交換する過程の寄与が，WW 散乱の発散積分を相殺する役目を担うのであれば，両者の結合定数は標準モデルヒッグスの結合定数と一定の関係になければならない．

$$g^2(h^0WW)+g^2(H^0WW)=g^2(\varphi_{SM}WW) \tag{3.63 a}$$

表 3.2 を見ればこの関係式が成立しているのがわかる．また

$$g^2(h^0ZZ)+g^2(H^0ZZ)=g_Z{}^2 \tag{3.63 b}$$

$$g^2(h^0A^0Z)+g^2(H^0A^0Z)=g_Z{}^2 \tag{3.63 c}$$

も成立する．さらに，$s\sim m_Z{}^2$ 付近で，h^0ZZ と h^0A^0Z の結合がともに小さいということもありえない．

これらの事実は，次の反応 ($\phi^0=H^0$, h^0)

$$Z \longrightarrow \phi^0Z^* \to \phi^0 l\bar{l}$$

$$Z^* \longrightarrow \phi^0 Z$$

$$Z \longrightarrow \phi^0 A^0$$

が，エネルギー的に許される遷移であれば，A^0, h^0, H^0 の少なくもどれか一つには φ_{SM} に対すると同程度の検出効率をもつことを意味する．

b．MSSM ヒッグス探索の現状と将来

荷電ヒッグスについては，(3.62) を参照すると，

$$\frac{BR(H^+\to\tau^+\nu)}{BR(H^+\to c\bar{s})}\doteqdot\frac{m_\tau{}^2\tan^4\beta}{3m_c{}^2} \tag{3.64}$$

がいえる．H^+ の検出は，$\tau\nu$ モードでも純ハドロンモードでも可能なので，$\tan\beta$ の値によらない m_{H^+} の下限値が LEP で求められている[3,26]．

$$m_{H\pm}\gtrsim 59.5\,\mathrm{GeV} \tag{3.65 a}$$

(H^0, h^0, A^0) の $e\bar{e}$ コライダーでの発見法は，標準理論のヒッグス発見法とほとんど同じであるが，A の存在で自由度が増すので，$e^-e^+\to h^0Z^*$ のほかに，$e^-e^+\to h^0A\to\tau\tau b\bar{b}$，4 ジェットチャネルも使えるようになる．現時点では，LEP，SLC のデータより[3,26]，

$$m_A>76.1\,\mathrm{GeV}, \qquad m_h>72.2\,\mathrm{GeV} \tag{3.65 b}$$

がいえている (図 3.15 (b))．LEP 200 では，中性ヒッグスに対し，$m_h\lesssim 105$ GeV ならば発見能力があることはすでに述べた．

LEP 200 で発見できないとき，次期 e^+e^- コライダーのエネルギー $\sqrt{s}$ はどのくらいに設定する必要があろうか．中性の軽いヒッグス h^0 に対しては，放射補正をしても，m_h の値はそう大きくはならず，150 GeV 程度が上限と考えられている．ちなみに，パラメター値を超対称理論の合理的な範囲（例えば

$m(\tilde{t})=1$ TeV, $m_t=175$ GeV として, $1<\tan\beta<m_t/m_b$) でパラメターを動かす限りは, $0<m_A<\infty$ の範囲で, $m_h \lesssim 115$ GeV となる. したがって, $\sqrt{s} \gtrsim 300$ GeV であれば発見領域に入る.

ハドロンコライダーでの h^0, H^0, A^0 の発見法もまた標準理論でのヒッグス発見法に準じるが, ヒッグス粒子種の増えること, 超対称粒子の存在によって崩壊分岐比が大いに変わることなどにより, 前節で議論したヒッグス探索法は必ずしも当てはまらない. したがって, h^0 が軽いからといって, ハドロンコライダーで見つかる保証はない. 荷電ヒッグスは, $m_{H^\pm}<m_t$ ならば, $pp \to t\bar{t}X$, $t \to H^+b$, $H^+ \to \tau\nu$ を通じて見つけることができる.

LEP 200 もしくは LHC で, h^0 (または他のヒッグス) の存在が確認できれば, 崩壊分岐比を精度よく測ることにより, $(m_A, \tan\beta)$ のパラメターを決められる. 標準モデルのヒッグス $\varphi_{SM}{}^0$ ではなく MSSM ヒッグス h^0 であると確認するためには, 分岐比の決定 (あるいは標準モデルにはない A^0 や $H^\pm$ の生成反応などの存在) が不可欠であり, これが次の課題となる. ただし, LEP 200 と LHC では, ヒッグスセクターの探索のみからは, MSSM の可否が判定できる上記パラメター平面のすべてを被うことはむずかしいかもしれないと議論されている[24,27] (図 3.16). 先に標準モデルにおける最小ヒッグスの探索で

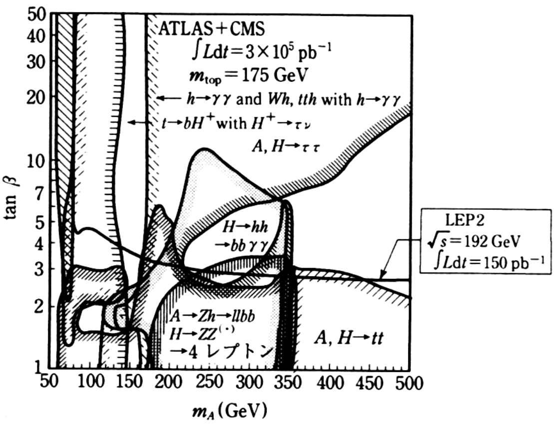


図 3.16 LEP 200 と LHC で探索可能な超対称 (MSSM) パラメター領域を各種ヒッグス ($H^\pm, H^0, h^0, A^0$) の検出可能な崩壊モードとともに示す[24]. パラメターを楽観的にとればすべての領域をカバーできるが, 設定の仕方では, 探索達成不可能な領域が生じる.

も検出の不確実な質量領域（$H^0 \to 2\gamma$ モードと $4l$ モードの境目）があったが，超対称モデルのヒッグスでは $H^0, h^0 \to \gamma\gamma, 4l\bar{l}$ などの分岐比がさらに小さくなり，検出困難な領域が存在するためである．この場合は，$\sqrt{s}=300\sim500$ GeV の高輝度の e^+e^- リニアコライダーを必要とする．

3.5 ヒッグスは素粒子か

3.5.1 強結合理論

ユニタリティやトリヴィアリティの議論から，ヒッグス粒子の質量はおおよそ 1 TeV を超えることはないと議論した．もし，質量 1 TeV 以下で見つからないときはどうなるか．ヒッグスの質量が 1 TeV を大きく上回るときは，WW 散乱振幅 (3.21) で，$m_H{}^2 \gg s$ とすると，

$$a_0 \fallingdotseq \frac{G_F s}{16\sqrt{2}\pi} \lesssim \frac{1}{2} \tag{3.66}$$

となり，$s \fallingdotseq (1.8\ \mathrm{TeV})^2$ でユニタリー極限に到達する．この場合，1.8TeV よりエネルギーの低いところで，新現象（共鳴現象の発生もしくは新相互作用の介入）が発生することが期待される．ヒッグスの質量が，新現象の介入するエネルギーより大きいところにあるということは，ヒッグスの相互作用が新現象での理論体系の低エネルギー近似ということを意味する．ヒッグスの実体は，素粒子ではなく新相互作用による力学的現象（例えば，後に述べるテクニクォークの束縛状態）と見なさなければならない．

このような新現象を探る有効な手段は何であろうか．仮にヒッグスが見つからないとしても，ゲージボソンの縦波成分 W_L, Z_L はヒッグス機構の産物であるから，W_L, Z_L のもつ相互作用はヒッグスのもつ相互作用と同起源である．したがって，$W_L W_L$ 散乱（$W_L Z_L, Z_L Z_L$ 散乱を含む）を調べることにより電弱対称の破れの原因を追求することができる．$m_H \gtrsim 1$TeV ということは λ が大きいこと（$\lambda/4\pi \gtrsim O(1)$），すなわちヒッグスセクターが強結合となることを示すから，摂動論的扱いは予言能力を失う．われわれは $W_L W_L$ 散乱過程を観察して，新しい物理現象のヒントを知りたいわけであるが，その場合，$W_L W_L$ 散乱の反応率の信頼できる計算法があるだろうか，という疑問に直面する．幸

いなことに答はイエスである．この道具となるのが“等価定理”と“低エネルギー定理”である．

まず，われわれはヒッグス粒子は存在しないにしても対称性の自発的破れを引き起こすヒッグス機構は働いていると仮定する．この場合ヒッグスは超伝導におけるクーパー対のように複合粒子，または類似の力学的現象である．ヒッグス機構を働かせるには，ヒッグススカラーと同じ役割を果たす少なくも4種の等価スカラー場（$w^{\pm}, z, h$ と書く．必ずしも素粒子である必要はなく複合体でもよい）が存在し，その系の自己相互作用は実効的に次の $\mathcal{L}_{SB}$(SB：symmetry breaking の略）で表されるとする[28]．

$$\mathcal{L}_{SB}=-\frac{\lambda}{4}(2w^+w^-+z^2+h^2-v^2)^2 \tag{3.67 a}$$

この式は，ヒッグス自己相互作用項と同じ形を採用したものである．すなわち，対称が自発的に破れる前の（3.2）のラグランジアンで，

$$\phi=\begin{bmatrix} w^+ \\ \dfrac{h+iz}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

とおけば，(3.67 a) が得られる．この新しい相互作用が活躍する領域のエネルギースケールを M_{SB} としよう．この相互作用の結果自発的に対称性が破れて，h が真空期待値，$\langle h\rangle=v$ をもつとき，$h=v+h'$ として，あらためて h' を h とおく．このとき，h が質量をもつとともに，3個の質量のないゴールドストーンボソン $w^{\pm}, z$ が出現する．これらの粒子間の相互作用 $\mathcal{L}_{SB}$ は

$$\mathcal{L}_{SB}=-\lambda vh(2w^+w^-+z^2+h^2)-\frac{\lambda}{4}(2w^+w^-+z^2+h^2)^2 \tag{3.67 b}$$

で表される．このゴールドストーンボソンがゲージ場と結合すれば，弱相互作用の $W^{\pm}$ と Z^0 が質量を獲得するのは今まで通りである．このとき次の等価定理が成立する．

a．等 価 定 理

十分高エネルギー ($s\gg m_W{}^2,\ m_Z{}^2$) では，$W^{\pm}$, Z^0 の縦波成分やヒッグス H の散乱振幅は，$w^{\pm}, z, h$ の散乱振幅と等しい．

等価定理が成立すれば，ベクトル粒子である W, Z を，スカラー粒子の w, z で置き換えられるから，相互作用の性質を調べる上で計算が簡単になるという

利点がある．等価定理を摂動の1次で検証するのは容易である[7]．例えば

$$\mathcal{M}(w^+w^- \to w^+w^-) = -2\lambda\left[\frac{s}{s-2\lambda v^2} + \frac{t}{t-2\lambda v^2}\right] \tag{3.69 a}$$

$$\mathcal{M}(w^+w^- \to zz) = -2\lambda\left[\frac{s}{s-2\lambda v^2}\right] \tag{3.69 b}$$

は，$\mathcal{L}_{SB}$ を使って容易に計算できるが，$m_H{}^2=2\lambda v^2$, $2\lambda=\sqrt{2}G_F m_H{}^2$ を使えば，(3.69) は (3.19) に等しいことが直ちにわかる．等価原理は R ゲージでは，ゲージ結合の最低次，λ のすべての高次において正しいことが証明されている[29]．このことは大事である．なぜなら，われわれは摂動展開では近似のよくない強結合 ($\lambda/4\pi \fallingdotseq 1$) の場合に応用したいからである．

b．低エネルギー定理

次に，(3.67 a) で，$w^\pm \to \pi^\pm$, $z \to \pi^0$, $h \to \sigma$, $v \to f_\pi/\sqrt{2}$ (π は π 中間子，σ は $J^P=0^+$ のメソン，f_π は $\pi \to \mu\nu$ 崩壊の崩壊定数で $f_\pi=0.94\,m_\pi=132$ MeV, I-§10.1.3 参照) と置き換えたものは，いわゆる σ モデルと呼ばれているものに等しい[30]．σ モデルはカイラル対称 ($SU(2)_L \times SU(2)_R$) の自発的破れによって，σ が真空期待値 $\langle\sigma\rangle = f_\pi/\sqrt{2}$ をもつとき，現れるゴールドストーンボソンが π 中間子であると見なす立場であり，強い相互作用での PCAC や，アイソスピン対称 ($SU(2)_{L+R}$) を再現し，低エネルギーでの π や核子の関与する現象をよく記述することが知られている．σ モデルから $\pi\pi$ 散乱について次の低エネルギー定理が成立する[31]．例えば $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ 過程で，$\sqrt{s} \ll$ 1GeV, $4\pi f_\pi$ ならば，

$$\mathcal{M}(\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0) \fallingdotseq \frac{s}{(f_\pi/\sqrt{2})^2} \qquad s \ll m_\rho{}^2,\ (4\pi f_\pi)^2 \tag{3.70}$$

が成立する．この定理は，σ モデルがもつ対称性の性質 ($SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称；QCDでクォークの質量 $m_u=m_d=0$ ならば厳密に成立する) と，π がこの対称群の自発的破れに伴うゴールドストーンボソンであるという議論からカレント代数を使って導かれるもので，反応現象のモデルの如何，摂動の次数に関わらず成立する一般的な定理である．そこで，$\pi^\pm \to w^\pm$, $\pi^0 \to z$, $\sigma \to h$, $f_\pi/\sqrt{2} \to v$ ともとにもどして，$s \ll (4\pi v)^2$ であれば，低エネルギー定理が成立する条件が整い，

$$\mathcal{M}(w^+w^- \to zz) \fallingdotseq \frac{s}{v^2} \qquad s \ll M_{SB}^2,\ (4\pi v)^2 \tag{3.71}$$

がいえる．さらに $s \gg m_W^2$ であれば等価定理が成立して，w, z はゲージボソン W_L, Z_L に置き換えられるから，

$$\mathcal{M}(W_L^+W_L^- \to Z_LZ_L) \fallingdotseq \frac{s}{v^2} \qquad m_W^2 \ll s \ll M_{SB}^2 \tag{3.72}$$

が成立する．(3.69 b) と比較すると，$s \ll 2\lambda v^2$ であれば，強結合の場合でも摂動の 0 次計算が正しい低エネルギーの振る舞いを与えることがわかる．(3.20) を使って $J=0$ の部分波振幅 $a_{00}(J=I=0)$ に変換すると

$$a_{00} \fallingdotseq \frac{s}{16\pi v^2} = \frac{s}{(1.8\ \mathrm{TeV})^2} \tag{3.73 a}$$

がいえる．可能なチャネルとしては $W^+W^- \to ZZ$ のほかに，W^+W^-，$W^\pm Z$，$W^\pm W^\pm$ の弾性散乱があり，$a_{JI}=a_{00}$，a_{11}，a_{02} の 3 個の独立な振幅が存在する．ZZ の弾性散乱振幅はこの近似では 0 である．それぞれの振る舞いは

$$a_{11} \fallingdotseq \frac{s}{96\pi v^2}, \qquad a_{02} \fallingdotseq \frac{s}{32\pi v^2} \tag{3.73 b, c}$$

となる[29]．これらの振幅は低エネルギーでは s に比例して増加するので，ユニタリティ極限 $|a_{00}|=1$ に達する s は，(3.73 a) から

$$s \fallingdotseq 16\pi v^2 \fallingdotseq (1.8\ \mathrm{TeV})^2 \equiv \Lambda_{SB}^2 \tag{3.74}$$

したがって，s が $(1.8\ \mathrm{TeV})^2$ に到達する以前に，$s \fallingdotseq M_{SB}^2$ で何らかのメカニズムが働いて，ユニタリティを満たすようになるはずである．有限質量のヒッグスが存在すれば $M_{SB}=m_H$ であり，まさしくそうしたメカニズムの一つを与える．

ヒッグスが比較的軽い粒子 ($m_H \ll 1\mathrm{TeV}$) であるならば，$\lambda/4\pi$ は小さい ($\lambda/4\pi = m_H^2/(8\pi v^2) \ll 1$) ので，弱相互作用は弱結合のままであり，ユニタリー極限を超える事態は心配しなくてよい．この議論は弱い力の 4-フェルミ相互作用が s とともに増加する振幅を与え，$s \sim \pi/G_F = \sqrt{2}\pi v^2 \sim (400\ \mathrm{GeV})^2$ で，ユニタリティが破れるという昔の議論と平行している．$m_W \ll 400\ \mathrm{GeV}$ であったがゆえに，ユニタリティ極限が実現する前に振幅を減衰させる機構 ($SU(2) \times U(1)$ の非アーベルゲージ理論) が介入し，弱相互作用の結合定数 g_W は小さい値であった．$m_W \sim 400\ \mathrm{GeV}$ であったならば $g_W \sim O(1)$ となり弱相互作用は

強結合になっていたであろう．m_H～1 TeV の振幅 a_{00} の振る舞いを図 3.17 (a) に示す[32)]．m_H が 1TeV くらいまで見つからなければ，$\lambda/4\pi \fallingdotseq O(1)$ となって，強結合の理論となり，$\pi\pi$ が共鳴をつくるように $W_L W_L$ も共鳴をつくるなど多彩な現象が現れる可能性がある．

c. テクニロー

こうした理論の代表的なものがテクニカラー理論[33)]である[*7)]．σ モデルに QCD が対応したように，$\mathscr{L}_{SB}$ にはテクニ QCD を対応させる．テクニ QCD とは，テクニフェルミオンに，テクニカラーというカラーに比べて一回り強い力の源を付与させ，その力学は QCD と同様であるとするものである．QCD に π, σ が存在したようにテクニ π とテクニ σ が存在して，これがゴールドストーンボソンとして，ヒッグス機構を司る．すなわちヒッグス粒子は複合粒子であり，テクニフェルミオン対が凝縮したものと見なす立場である．テクニカラーという強い相互作用がこれらテクニフェルミオンに作用するので，QCD における ρ や ω メソンに対応して，テクニ ρ やテクニ ω をつくる．すなわち，テクニカラー理論によれば O(1TeV) の領域にたくさんの共鳴が存在す

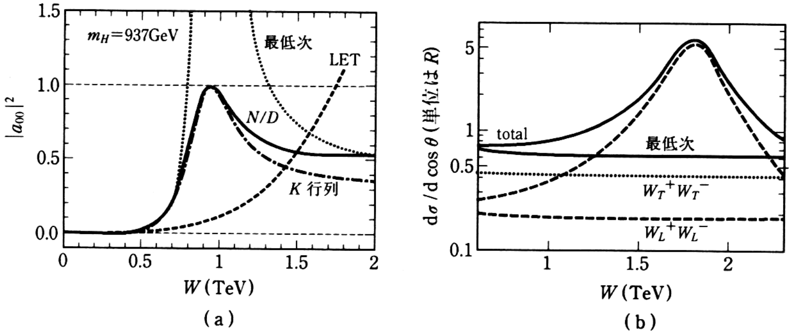


図 3.17　TeV 領域での $W_L W_L$ 散乱の振る舞い

(a)　$I=J=0$ の散乱振幅．点線は 937 GeV のヒッグスがあるときの標準理論最低次摂動計算．実線および一点鎖線はユニタリー化した場合の振る舞い．ダッシュ線 (LET) が低エネルギー定理による[32)]．

(b)　テクニ ρ メソン (ρ_{TC}) が存在する場合，LET に比べどれだけ断面積が大きくなるかの例を示す．$m_{\rho_{TC}}=m_\rho(v/f_\pi)\fallingdotseq 1.8$ TeV とした[17)]．

---

*7) テクニカラー理論はフェルミオンの質量発生機構や香りを変える中性カレント抑圧に問題があり，現実味のあるモデル構築は困難であるが，ここに述べる考え方は十分成立する．

る．テクニローの質量は，QCD との類推が成り立つものならば[30)]

$$\sim m_\rho \frac{v}{f_\pi/\sqrt{2}} \sim 1.8\ \mathrm{TeV} \tag{3.75}$$

くらいと推察される．このとき，$W_L W_L$ 散乱の振る舞いがどう変わるかを図 3.17 (b) に示す[17)]．

d. *WW* 散乱

ヒッグスが存在せずともテクニ ρ のような共鳴群をつくる場合は，$W_L W_L$ の不変質量 M_{WW} のスペクトルに共鳴の山が出現し，LHC のようなハドロンコライダーで調べることができる．天地創造主が意地悪くて，強結合相互作用でも共鳴をつくらない宇宙をつくった場合が考えうる最も悲観的なシナリオとなるが，このときでも低エネルギー定理によって最低限の振幅は保証されている．しかし，この場合の $W_L W_L$ 散乱の計数率は非常に低いので，QCD 雑音の中から意味のある $W_L W_L$ 散乱情報が得られるかを確認しておくことは，対称性の破れの原因を追求する際の抜け道をつくらないという意味で非常に重要な課題である．

3.5.2 ヒッグス機構解明の戦略

これまでのヒッグスセクターでの議論によれば，軽いヒッグス ($m_H \ll$ 1TeV) が見つかるか，弱相互作用が強結合理論になるかのどちらかのシナリオが確実に実現する．標準理論を正しいとして計算した放射補正と実験データとの比較から，あるいは超対称性が存在するならば，ヒッグスは軽くて 100～300 GeV のところで見つかる可能性がある．それほど軽くはないにしても標準モデルヒッグスに対して～800 GeV くらいまでは，ハドロンコライダーLHC に発見能力がある．ヒッグスが素粒子として発見された場合は，後に議論するように超対称性（後述第 5 章）の存在する可能性が大きく，超対称粒子の存在が期待されるなど大いなる発展が望めるであろう．ヒッグスが非常に重いか存在しないとき，つまり強結合の場合は多分 1TeV 付近にテクニカラーなどの共鳴群があると予想され，やはり新しい物理の豊かな実りを期待できる．

強結合でなおかつ共鳴群が存在しないという最悪のシナリオの場合，ヒッグ

スセクターの解明の鍵となるのは $W_L W_L$ 散乱である．次世代のハドロンコライダーとしては，最悪のシナリオの場合でも $W_L W_L$ 散乱の調査が可能となるための最低限のエネルギーおよびルミノシティをもつことが望ましい．将来計画におけるハドロンコライダーの設定すべきエネルギーとルミノシティは，電弱対称性の破れがいかなる形態をとろうともあらゆる場合に対処できるための必要最低限の仕様を満たさなければならないという論理（いわゆる，no lose theorem）は，Chanowitz[34] により強調された．これを実現するためには，$\sqrt{s}$ を 40 TeV より相当大きくし，かつルミノシティは $10^{34}/\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$ を実現するスーパーハドロンコライダーを必要とする．

一方，比較的軽いヒッグスが発見された場合を想定してみよう．この場合，第5章で後述するように，超対称性が存在する確率はかなり高くなる．したがって，次の段階として，ヒッグスの崩壊分岐比を測ることにより，標準ヒッグスか超対称ヒッグスかを決めなければならないが，この点に関してはハドロンコライダーより $e\bar{e}$ コライダーの方がはるかに強力である．ヒッグス以外の超対称粒子の生成能力もまた，ハドロンコライダーの場合は，強い相互作用をするグルーイノ*8) かクォークのパートナーであるスクォーク（squark）にほぼ限られるが，$e\bar{e}$ コライダーでは，エネルギー的に可能ならばほとんどすべての新粒子の生成かつ同定が可能である．

一般的に $e\bar{e}$ コライダーは，発見能力ばかりでなく，精密実験能力にも優れているので，ヒッグス発見後，その質量に合わせて的を絞る戦略がありうる．ヒッグスの質量が未知の現時点では，標準ヒッグスの生成能力をもつという条件は外せないであろう．軽いヒッグスの発見機として期待するならば，$\sqrt{s} \gtrsim$ 250 GeV が最低の要求であるが，将来的には $\sqrt{s} \fallingdotseq 1 \sim 3$ TeV，$L \gtrsim 10^{34}/\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$ が必要であろうと考察される．LHC の次にくる次世代の加速器としては，これだけの性能が必要であり，JLC（Japan Linear Collider；日本），NLC（Next Linear Collider；米），CLIC（CERN LInear Collider；欧），TESLA（独）などの建設をめざして研究開発が精力的に進められている．

*8) 詳細は第5章で議論するが，超対称性があればすべての既知の素粒子に対し，スピンが 1/2 異なる超粒子パートナーが存在する．グルーイノはグルーオンのパートナーでスピン 1/2 をもち，スクォークはクォークのパートナーでスピン 0 をもつ．

参考文献

1) J.F. Gunion *et al.*: Higgs Hunter's Guide, Addison-Wesley, 1990
2) O. Treille: Talk at Int. Conf. on High Energy Physics, July 1998, Vancouver, Canada
3) PDG: Particle Data Group: *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 1363; **D54** (1996); *EPJ*, **C3** (1998)
4) A. Blondel: CERN-PPE/94-133 "Precision Electroweak Physics at LEP", P. Langacker and M.X. Luo: *Phys. Rev.*, **D44** (1991) 817
5) CDF; F. Abe *et al.*: *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 2966
6) J. Ellis, G. Fogli and E. Lisi: *Phys. Lett.*, **B274** (1992) 456
   J. Ellis, G. Fogli and E. Lisi: CERN TH-7261/94 "The Top Quark and Higgs Boson Masses in the Standard Model and the MSSM"
7) N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi and R. Petronzio: *Nucl. Phys.*, **B158** (1979) 295
   M. Lindner: *Z. Phys.*, **C31** (1986) 295
8) M. Sher: *Phys. Lett.*, **B317** (1993) 159, addendum, **B331** (1994) 448
9) G. Anderson: *Phys. Lett.*, **B243** (1990) 265
   P.B. Arnold: *Phys. Rev.*, **D40** (1989) 63
10) B.W. Lee, C. Quigg and H.B. Thacker: *Phys. Rev.*, **D16** (1977) 1519
11) M. Luescher and P. Weisz: *Phys. Lett.*, **B212** (1988) 472; *Nucl. Phys.*, **B318** (1989) 705
   J. Kuti *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 678
   U. M. Heller *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B405** (1993) 555
12) J. Finjord: CERN TH2663 (1979)
   R.N. Cahn *et al.*: *Phys. Lett.*, **B82** (1979) 113
   A. Barrose *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B267** (1986) 509
13) S.L. Glashow *et al.*: *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 1724
14) ALEPH; R. Barate *et al.*: *Phys. Lett.*, **B440** (1998) 403
   OPAL; G. Abbiendi *et al.*: EPJ **C5** (1998) 19
15) R.N. Cahn: *Nucl. Phys.*, **B253** (1985) 341
   G. Altarelli *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B287** (1987) 205
16) S. Dawson: *Nucl. Phys.*, **B249** (1985) 42
   G.L. Kane *et al.*: *Phys. Lett.*, **B148** (1984) 367
17) B.L. Burke: SLAC Summer School on Part. *Phys.*, July 11-27, 1990
18) M. Chanowitz and M.K. Gaillard: *Phys. Lett.*, **B142** (1984) 85 および 14), 15)
19) G. Altarelli *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B287** (1987) 205
20) F.H. Georgi: *Phys. Rev. Lett.*, **40** (1978) 692
   R.N. Cahn and S. Dawson: *Phys. Lett.*, **B136** (1984) 196
21) S. Dawson: Lecture at 1994 Theoretical Advanced Study Institute, Boulder, Co., May 30-June 23, 1994

22) J.F. Gunion, G.L. Kane *et al.*: Overview and Recent Progress in Higgs Boson Physics at the SSC, in Proc. 1990 DPF Summer Study on High Energy Physics: "Research Directions for the Decade", Snowmass (1990)

23) G.F. Gunion: *Phys. Rev. Lett.*, **261** (1991) 510
W.J. Marciano and E. Paige: *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 2433
Z. Kunst, Z. Trocsanyi and J. Stirring: ETH-TH 91/17

24) CMS proposal, technical design report, CERN/LHCC94-38
ATLAS proposal, technical design report, CERN/LHCC94-43
C. Llewellyn-Smith, The Large Hadron Collider Project, Talk at Lepton-Photon International Conference at Beijing, Aug. 10-15, 1995
LEPII Workshop Interim report, CERN-TH/95-151, CERN PPE/95-78

25) H. Baer *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 352; *Phys. Rev.*; **D41** (1990) 906
Y. Okada, H. Yamaguchi and T. Yanagida: *Prog. Theor. Phys. Lett.*, **85** (1991) 1; *Phys. Lett.*, **B262** (1991) 54
J. Ellis, G. Ridolfi and F. Zwirner: *Phys. Lett.*, **B257** (1991) 83; **B262** (1991) 477

26) The LEP Collaboration: *Phys. Lett.*, **B276** (1992) 247
D. Decamp *et al.*: *Physics Reports*, **216** (1992) 253-340
DELPHI; P. Abreu *et al.*: *Phys. Lett.*, **B420** (1998) 140, EPJ, **C2** (1998) 1
ALEPH; R. Barate *et al.*: *Phys. Lett.*, **B440** (1998) 419
OPAL; G. Abbiendi *et al.*: *EPJ*, **C5** (1998) 19

27) J. Gunion: *Phys. Rev.*, **D46** (1992) 2040
J. Gunion and L. Orr: *Phys. Rev.*, **D46** (1992) 2052
H. Baer *et al.*: *Phys. Rev.*, **D47** (1993) 1062

28) T. Appelquist *et al.*: *Nucl. Phys*, **B22** (1979) 317; *Phys. Rev.*, **D22** (1980) 200
A. Longhitano: *Phys. Rev.*, **D22** (1980) 1166: *Nucl. Phys.*, **B188** (1981) 118

29) M. Chanowitz and M.K. Gaillard: *Nucl. Phys.*, **B261** (1985) 379

30) M. Gell-Mann and M. Levy: Nuovo Cimento 16 (1960) 705, または, T.P. Cheng and L.F. Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics, p. 147 など参照

31) S. Weinberg: *Phys. Rev. Lett.*, **17** (1966) 616

32) K. Hikasa: Talk at the Workshop with Linear Collider, Saariselka, Lapland, Finland, Sept., 1991, KEK 91-214

33) テクニカラー理論
S. Weinberg: *Phys. Rev.*, **D19** (1979) 1277
L. Susskind: *Phys. Rev.*, **D20** (1979) 2619
レビューとしては,
E. Farhi and L. Susskind: *Phys. Rep.*, **74** (1981) 277
最近の発展については,
B. Holdman: *Phys. Rev.*, **D24** (1981) 1441; *Phys. Lett.*, **B150** (1983) 301
K. Yamawaki *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 1353
T. Appelquist *et al.*: *Phys. Rev.*, **D36** (1987) 508

34) M. Chanowitz: Proc. Higgs Workshop, Erice, Trapani, Sicily, July, 1989

4
ニュートリノ[1)]

これまでは，いかに標準理論が実験データを矛盾なく統一的に記述するかという観点から話を進めてきた．これからは，むしろ標準理論の欠点に焦点をあてて議論を進めることにする．現在のところ標準理論に明らかに矛盾する事実は，実験データとしてはない．CPの非保存，ヒッグス粒子の存在と相互作用の性質が実験的に解明されれば，結果次第では標準理論の改訂につながる可能性があるが，標準理論の枠内におさまってしまうことも考えられる．この章では標準理論のわずかな拡張ですみ，かつ実験的にも最初に標準理論の限界を越えたニュートリノの現象について述べることとし，理論的に発展性のある大統一理論およびその関連については第5章で述べる．標準理論を越えようとするこれらの試みが，検証手段としての実験手法にも新風を吹き込み，高エネルギー加速器を使用する伝統的な手段のほかに，非加速器素粒子物理学という学際的な要素をもつ新しい分野を開拓したことは興味深い．その手段の一つ，地下に設置した水チェレンコフ測定器を使い，陽子崩壊検出という素粒子物理学上の研究テーマを追求する段階で，副産物として超新星ニュートリノが観測され，続いて太陽ニュートリノ検出の成功によって，ニュートリノ天文学という新しい学問分野が創始された．学問の発展が新しい手法の開拓を促し，新しい手段が新しい学問を創始する相互発展の典型例である．ニュートリノ天文学を含め天体物理学と素粒子物理学との境界領域は，将来性豊かな新分野である．この章では，ニュートリノ天文学にふれて，この興味ある分野を垣間見ることにするが，深入りはせず素粒子物理にとっての意義づけに絞って話を進める．

4.1 ニュートリノ質量の理論的諸問題

4.1.1 質量の上限値

ニュートリノの質量問題は，古くて新しい問題である．そもそも1930年パウリがニュートリノの存在を予言したとき，すでに質量は（当時の基準で）ゼロに近いであろうと予想していた．今日に到るまで β 崩壊のスペクトルから推察されるニュートリノの質量は実験精度の限界で常にゼロに等しい．この事実とパリティ非保存発見により，ニュートリノを2成分ワイル解（I-§3.8参照）とみる可能性が生じた．実験的には常に ν_L と $\nu^c{}_R$ *1) のみが観察されるという事実は，ワイル解 ψ_L と ψ_R のうち，自然が ψ_L のみを選択していることを示す．さらに，ニュートリノは電荷をもたないことから，粒子と反粒子の区別のつかないマヨラナ粒子（I-§3.8参照）である可能性も否定できない．この場合 $\bar{\nu}_R=(\nu_L)^c=\nu_R$ である．

一方，質量が有限であれば ν_R が存在しなければならない．なぜなら，質量が有限ならば光速以下でしか走れず，ニュートリノに先行する座標系で見ればヘリシティが逆転するからである．標準理論では ν_R は存在しないと要請している．この結果，ニュートリノの質量はゼロとなっている．しかし，この根拠は強固なものではない．標準理論では，ν_R があったとしても1重項に属するので，ゲージ粒子による $SU(2)$ 相互作用はない．さらに，$Q=I_3+Y$ によって Y もまた0であるので，$U(1)$ 相互作用もない．つまり，検出の方法がない不毛 (sterile) 粒子であるから，簡単のためないとしているだけであり，あって悪いわけではない．また標準理論の枠内で ν_R がまったく相互作用しないわけでもない．例えば，$\mathcal{L}\sim g\bar{\nu}_L\nu_R\phi$ の湯川型相互作用は $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論の範囲内で許される．これは，u クォークに質量を与えるためにヒッグスと u クォークとが結合する相互作用があるのと同じ理由である．この場合 ϕ が真空期待値をもてば，質量項を与える．すなわち，ν_R が存在することと質量が有限であることは標準理論内では同じことを意味する．このとき，

---

*1) ν_L の荷電共役状態として指定するときは $\nu^c{}_R$ と書く．粒子と反粒子の区別があるときは，$\nu^c{}_R=\bar{\nu}_R$，マヨラナ粒子のときは，$\nu^c{}_R=\nu_R$ である．

物質との相互作用の強さは，ヒッグスを介するという理由で質量に比例し，質量が小さいときは存在検証のテストが困難なのである．以上が ν_R をないとしても困らない理由である．

現在，ニュートリノの質量は実験誤差内でいずれも 0 もしくは非常に 0 に近いことが示されている[2)]．

$$
\begin{aligned}
m(\nu_e) &< \sim 7\,\mathrm{eV}\\
m(\nu_\mu) &< 170\,\mathrm{keV}\\
m(\nu_\tau) &< 18.2\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

一方，宇宙論を使えば，すべての香りのニュートリノについて

$$\textstyle\sum_j m_{\nu j} \lesssim 100\,\mathrm{eV} \tag{4.2}$$

$$m_{\nu j} \gtrsim 8\,\mathrm{GeV}\ \text{（ディラックニュートリノ）} \tag{4.3 a}$$

$$m_{\nu j} \gtrsim 14.4\,\mathrm{GeV}\ \text{（マヨラナニュートリノ）} \tag{4.3 b}$$

の範囲になければならないことがいえる（文献[3,4]，後述§8.4参照）．すなわち，宇宙論によれば，ニュートリノの質量があってはいけない禁止領域があり，この条件を考慮すると，ν_μ，ν_τ の質量もまた 100 eV を超えないことが結論できる．なお，LEP における Z の見えないモードへの崩壊幅の測定から，質量が 45 GeV 以下のニュートリノの存在は既知の 3 種以外は否定される．

現在ではニュートリノ振動の存在が確立し，ニュートリノが質量をもつことは実験的に証明されたといえる（後述§4.6）．それが素粒子論の中でどのような位置付けを与えらるかはこれからの話であるが，標準理論を超えて発展すべき方向の指針となることは間違いない．

標準理論では，仮にニュートリノに有限質量を与えることができたとしても，なぜニュートリノだけが他のレプトンやクォークに比べて極端に質量が小さいのか（例えば $m_{\nu e}/m_e \lesssim 10^{-5}$）を，同時に説明しなければならないという問題がある．質量の起源がヒッグスの真空期待値にあるならば，ヒッグスとの相互作用がニュートリノだけ違う理由は何もないからである．注意深い読者は，トップの質量（$m_t \sim 175\,\mathrm{GeV}$）は一番軽い電子の質量（0.5 MeV）に比べて 10^5 も大きく，質量のスケール問題はニュートリノに限った特殊な問題ではないと思うかもしれない．しかし，ニュートリノの質量は同じ世代の中で特別に軽い（$m_{\nu e} \ll m_e$，$m_{\nu\mu} \ll m_\mu$，$m_{\nu\tau} \ll m_\tau$）のに反し，トップの質量が重いこと

は世代の謎と密接に結びついていて，別の次元の問題ととらえる必要がある．なお余談になるが，世代の謎に関しては，現時点で説得力のある説明は存在しない．一つの可能性は，クォークやレプトンが複合粒子で，第2，第3世代は第1世代の励起状態であると考えるものである．しかし，これとても，励起状態のエネルギーが基底状態の10^5倍もあるレベル構造は考えにくいという難点をもっている．

そこで，以下マヨラナの可能性を含めて，質量項の一般的な取扱いから議論を始めよう．

4.1.2 質量行列

a. マヨラナ質量

任意の二つのスピノール場，ψ_1, ψ_2 に対して，

$$(1/2)(\overline{\psi}_{1L}\psi_{2R}+\overline{\psi}_{1R}\psi_{2L}+\text{h.c.}) \tag{4.4}$$

は，ローレンツ不変である．$\psi_1=\psi_2$ のとき，ラグランジアンの中のこの項をディラック質量項という．しかし，$\psi_1=\psi_2{}^c$ もしくは $\psi_2=\psi_1{}^c$ であっても自己エネルギーとしての解釈は成立するから，質量項としての候補になる．通常この形を質量項に加えないのは，

$$\overline{\psi}{}^c{}_L\psi_R=\left[\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi^c\right]^\dagger\gamma^0\psi_R=\psi_R{}^TC\psi_R \tag{4.5 a}$$

$$\overline{\psi}{}^c{}_R\psi_L=\psi_L{}^TC\psi_L \tag{4.5 b}$$

であるので，位相変換に対して不変ではなく，電荷またはレプトン数保存則を破るからである．このことから直ちに荷電粒子は上記のような質量項をもたないこと，つまりマヨラナ粒子ではありえないことがわかる．ニュートリノは，荷電レプトンとともに2重項をつくるので，荷電粒子と共通のレプトン数をもち，かつレプトン数保存が成立すると考えると，弱相互作用の実験事実は矛盾なく説明できる．この場合ニュートリノはマヨラナではない．しかし，よく考えるとニュートリノは中性であり，粒子と反粒子を区別する指標がない．実際，これまでレプトン数保存の証拠と考えられてきたある種の反応の有無，例えば

$$\nu_\mu+n\longrightarrow\mu^-+p,\qquad \nu_\mu+p\not\longrightarrow\mu^++n$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \longrightarrow \mu^+ + n, \qquad \bar{\nu}_\mu + n \not\longrightarrow \mu^- + p$$

などは，弱相互作用のV-A型という性質によって，レプトンと左巻き，反レプトンと右巻きは1対1に対応するので，ヘリシティ保存則のテストでしかないことに気がつく．真のレプトン数非保存のテストは後述する二重ベータ崩壊を見ないといけない*2)．すなわち，これまでの実験事実のみではニュートリノがディラックニュートリノであるとは断定できないのである．したがって，レプトン数保存が破れてもかまわないという条件を入れれば，ニュートリノの最も一般的なラグランジアンは，

$$-\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m_D(\bar{\psi}_L \psi_R + \text{h.c.})$$

$$+ \frac{m_L}{2}(\bar{\psi}^c{}_R \psi_L + \text{h.c.}) + \frac{m_R}{2}(\bar{\psi}^c{}_L \psi_R + \text{h.c.}) \tag{4.6}$$

と書ける．第1項が運動エネルギーを表し，第2項以下が質量項である．第3，4項をマヨラナ質量項と呼ぶ．第3，4項がなければ，これは通常のディラック粒子のラグランジアンである．このラグランジアンは次式で定義される2個のマヨラナ場

$$N_1 = \frac{\psi_L + (\psi_L)^c}{\sqrt{2}}, \qquad N_2 = \frac{\psi_R + (\psi_R)^c}{\sqrt{2}} \tag{4.7}$$

を導入して書き直すと理解しやすい．任意のフェルミオン場 χ, ϕ に対し，

$$\bar{\chi}_{L(R)} \gamma^\mu \phi_{R(L)} = 0, \qquad \bar{\chi}_{L(R)} \phi_{L(R)} = 0 \tag{4.8}$$

が成立することを使えば

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{N}_1 \gamma^\mu \partial_\mu N_1 + \bar{N}_2 \gamma^\mu \partial_\mu N_2 \tag{4.9 a}$$

$$\bar{N}_1 N_1 = (1/2)[\overline{\psi^c{}_R}\, \psi_L + \text{h.c.}] \tag{4.9 b}$$

$$\bar{N}_2 N_2 = (1/2)[\overline{\psi^c{}_L}\, \psi_R + \text{h.c.}] \tag{4.9 c}$$

$$\bar{N}_1 N_2 + \bar{N}_2 N_1 = \overline{\psi_L}\, \psi_R + \text{h.c.} \tag{4.9 d}$$

が示せるので，ラグランジアンは

---

*2) ニュートリノが質量をもてば，ニュートリノ生成 $(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu)$ において逆ヘリシティ成分が $(m_\nu/E_\nu)^2$ の割合で混じる．また，反応 $(\nu_\mu + p \to \mu^+ n)$ にも同じ割合だけ逆ヘリシティ成分の寄与がある．したがって，これを越える精度で，$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, $\nu_\mu + p \to \mu^+ + n$ の存在を否定すれば，真のレプトン数保存の証拠となる．逆に一例でも見つかればレプトン数非保存の証拠となる．

$$-\mathscr{L}=\bar{N}_1 i\gamma^\mu\partial_\mu N_1+\bar{N}_2 i\gamma^\mu\partial_\mu N_2$$
$$+m_D(\bar{N}_1N_2+\bar{N}_2N_1)+m_L\bar{N}_1N_1+m_R\bar{N}_2N_2$$
$$=\bar{N}_1 i\gamma^\mu\partial_\mu N_1+i\bar{N}_2\gamma^\mu\partial_\mu N_2+(\bar{N}_1,\ \bar{N}_2)\begin{bmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{4.10 a}$$

と書き直せる．ここに，

$$[M]=\begin{bmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{bmatrix} \tag{4.10 b}$$

はニュートリノ質量行列と呼ばれる．

上のラグランジアンから，ニュートリノが質量をもちかつ実験事実に適合するケースは次の3通りに分類できることがわかる．

(1)　$m_D\neq0,\ m_L=m_R=0$：

ディラックニュートリノで荷電粒子と同じ方程式にしたがう．同じ質量をもつ ν_R と ν_L の両方が存在し，この事実によって位相変換不変性が成立し，その結果レプトン数が保存する．この場合，ν_R の不在と質量がないことは同じことを意味する．この事情は ν_R の存在しない任意のモデル，例えば最も簡単な $SU(5)$ 大統一理論でも同じである．この場合の質量を与えるメカニズムは，u クォークと同じであり，ファインマン図としては図4.1 (a) のように表す．他のレプトン質量を導くと同じ真空期待値で，小さい質量を出すためには，ヒッグスとニュートリノの結合は他に比べて大幅に小さいと仮定しなければならず，不自然であると考えられている．

(2)　$m_L\neq0,\ m_R=m_D=0$:

左巻きのマヨラナニュートリノのみで質量が組めるケースである．標準理論では，左巻きニュートリノのみが存在する．したがって，マヨラナニュートリノであれば ν_R が存在せずとも質量をもつ可能性は存在する．しかし，ν_L は電子と組んでアイソスピン2重項を構成するので，質量項$\sim\nu_L{}^TC\nu_L$ はアイソスピン1となり，アイソスピン1/2のヒッグスには結合しないから，標準理論ではやはり質量はもてない．ただし，アイソスピン1のヒッグス $\chi=(\chi^0,\chi^-,\chi^{--})$ が存在して真空期待値をもてば質量をもつことができる[5]．この場合のラグランジアンは次の形となる．

$$-\mathcal{L} \sim g[\bar{\nu}_L, e_L]\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\chi}\begin{bmatrix} e^c{}_R \\ -\nu^c{}_R \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

このラグランジアン自身はレプトン数を破るとは限らない．χ がレプトン数 2 を担えばよいからである．しかし，その場合 χ に真空期待値をもたせることによって質量を発生させた段階で，もともとは保存していたレプトン数 L を破ることになる．この結果質量 0 のゴールドストーンボソン（$\chi^0=v+\rho+i\chi'$ の χ'）が発生し，これをマヨロンと呼ぶ．しかし，同時発生する有限質量の ρ に対する考察から，このマヨロンの存在は否定されることが次のようにしていえる．天体物理の考察（$\gamma e\to\rho e$ による星の冷却作用加速が，観測される星の進化速度と矛盾しないという条件）や 2 重 β 崩壊データより，ρ の質量は軽くなければならないという条件がつくので[6]，$Z\to\rho\chi'$ が運動学的に可能となる．この場合，Z の見えないチャネルへの崩壊幅 $\Gamma_{\rm inv}$ に $\Gamma(Z\to\rho\chi')=2\Gamma(Z\to\nu_i\bar{\nu}_i)$ だけ寄与し，$\Gamma_{\rm inv}$ に対する寄与は 3 種の既知のニュートリノでつきているという LEP 実験データに矛盾する．すなわち，アイソスピン 1 のマヨロンの存在は LEP 実験により否定される．また，χ^0 がレプトン数をもたないときはマヨロンは発生しないが，このときは，レプトン数保存を破る相互作用をはじめから仮定することになり，かつヒッグスの真空期待値を小さくしなければならないという困難を合わせもつ．

一方，標準理論のヒッグス $\boldsymbol{\Phi}=(\phi^+,\phi^0)$ を使って質量項を出すには，

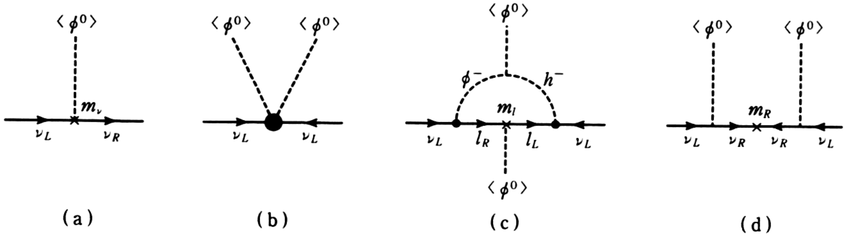


図 4.1　ニュートリノに質量を与えるメカニズム

(a)　ディラックニュートリノ

(b)　マヨラナニュートリノ．(c), (d) は (b) のモデル例

(c)　レプトン数を破る荷電スカラー h^- と荷電ヒッグス ϕ^- を通すループ

(d)　シーソーメカニズム

ϕ^0 はアイソスピン 1/2 の標準ヒッグスである．

$$-\mathscr{L} \sim \frac{f}{\Lambda}(\Phi^T C\tau\Phi)[\nu_L, e_L]C\tau\begin{bmatrix} e_L \\ \nu_L \end{bmatrix} \sim \frac{f}{\Lambda}\nu_L{}^T\nu_L\phi^0\phi^0 \tag{4.12}$$

の形の相互作用が必要である（図 4.1 (b)）．これは，繰り込み不可能であるので，何らかの新相互作用（適用エネルギースケール～Λ）の高次効果の低エネルギーでの実効ラグランジアンと見なせる．その一例を図 4.1 (c) に示す．これには，レプトン数保存を破るアイソスピン１重項の荷電スカラー h^-（ヒッグスではない）の存在を想定する（$\mathscr{L} \sim -g\,\overline{l}^c{}_R\nu_L h^-$）．さらに荷電ヒッグスがあれば，$h^-$ とも結合するのでループが形成できて，(4.12) の実効ラグランジアンがつくれる．ここで ϕ が真空期待値 v をもてば，ニュートリノ質量 $m_\nu \sim fv^2/\Lambda$ となり，$f \sim 1$, $v=246$ GeV とすれば，数 eV 程度の質量をつくるには，$\Lambda \sim 10^{14}$ GeV を必要とする．この相互作用（$\nu_L\phi$ 散乱）にプランクスケールでのユニタリティを要求すると，$f/\Lambda < 2\pi/m_{\text{Planck}}$ となり，このときは $m_\nu \lesssim 10^{-5}$ eV となる[1]．すなわち，ニュートリノ質量が小さいという事実は，ニュートリノ質量発生の原因となる新相互作用のエネルギースケールが非常に大きいということを示唆することがわかる．大統一理論（エネルギースケール～10^{15} GeV）が，ニュートリノ質量を説明する有力な候補として注目されるのはこの理由による．

(3)　$m_D \neq 0$, $m_L \neq 0$, $m_R \neq 0$:

左巻きと右巻きの２種のマヨラナニュートリノが存在し，$m_L \neq m_R$ の場合であって，上記の最も一般的なニュートリノ質量行列で記述される場合である．この場合，余分の右巻きマヨラナ粒子 ν_R が存在するのでやはり標準理論とは両立しない．ν_R が存在すれば，それの交換によって，上に述べた $\nu_L\nu_L\phi\phi$ 結合を実効的に実現できる（図 4.1 (d)）．この場合 $\Lambda = m_{\nu R}$ となる．これをシーソーメカニズムと呼ぶ．

b.　シーソーメカニズム[7]

(4.10) のニュートリノ質量行列を対角化して得られる二つの場を，ν', N, その固有質量をそれぞれ m_ν, m_N とする．この質量固有解は L 成分と R 成分の混合であり，決まったカイラリティ固有状態にない．いま ν_R を導入する以外は，標準理論の枠内で考えることにしよう．そうすると，アイソスピン１のヒッグスがないから，ν_L は質量をもてず ($m_L=0$)，ディラック質量 m_D は通

常のクォークもしくは荷電レプトンの質量を表すことになる．したがって，

$$m_L \fallingdotseq 0, \qquad m_R \gg m_D,\ m_L \tag{4.13}$$

という条件が設定されるので，質量固有解は m_L を無視する近似で次のように表される．

$$\nu' \fallingdotseq N_1 - \frac{m_D}{m_R} N_2, \qquad N \fallingdotseq N_2 + \frac{m_D}{m_R} N_1 \tag{4.14 a}$$

$$m_\nu \fallingdotseq -\frac{{m_D}^2}{m_R}, \qquad m_N \fallingdotseq m_R \tag{4.14 b}$$

質量が負であることは問題ではない．$\nu \equiv \gamma^5 \nu'$ と変換すれば，質量を正にできるからである．上式から

$$m_\nu \cdot m_R = {m_D}^2 \tag{4.15}$$

となり，m_R を大きくすることにより m_ν を小さくすることができる．これがシーソー機構という名の由来である．このとき，ν はほぼ左巻きであり，N はほとんど右巻きである．

$m_D \fallingdotseq m_l$ とおき，ニュートリノ質量を実験に矛盾しない範囲に入るように m_R を設定すると，

$$\begin{aligned} m(\nu_e):m(\nu_\mu):m(\nu_\tau) &\sim {m_e}^2:{m_\mu}^2:{m_\tau}^2 \\ &= 1 : 4\times10^4 : 2\times10^7 \ \text{（単位 eV）} \quad m_R = 200\ \text{GeV} \\ &= 10^{-10} : 4\times10^{-6} : 2\times10^{-3} \quad m_R = 2\times10^{12}\ \text{GeV} \\ &= 10^{-13} : 4\times10^{-9} : 2\times10^{-6} \quad m_R = 2\times10^{15}\ \text{GeV} \end{aligned} \tag{4.16}$$

となる．すなわち，ニュートリノ質量だけからは，m_R は大統一のスケール $\sim O(10^{15}\ \text{GeV})$ から ~ 200 GeV くらいまでの可能性がある．ただし，(4.2) の宇宙論による制限を信じるならば，m_R は相当に大きく（$\gtrsim 10^8$ GeV）とらなければならない．

以上に述べたように，マヨラナニュートリノであれば，ニュートリノの質量を小さくするメカニズムがいくつか考えられる．ディラックニュートリノの場合は，小さい質量を自然に導入することがむずかしく，恣意的に手で入れなければならない．この理由で，ニュートリノはマヨラナ粒子であるとする考え方が有力である．

4.1.3 左右対称モデル

a. 質量ハイラーキー

こうしたメカニズムを与える一つの可能性として左右対称モデルがある[8]．左右対称モデルとは，標準理論の中の $SU(2)_L$ を $SU(2)_R \times SU(2)_L$ に拡張するもので，対称性の破れが次の2段階を経て生じると仮定する．

$$SU(2)_R \times SU(2)_L \times U(1) \xrightarrow{\langle \Phi \rangle_R} SU(2)_L \times U(1) \xrightarrow{\langle H \rangle_L} U(1)_{EM} \tag{4.17}$$

$\langle \Phi \rangle_R$, $\langle H \rangle_L$ は，それぞれ右巻き，左巻きゲージ粒子に質量を与えるヒッグス粒子が真空期待値をもつことを示す．最初の段階でゲージボソン W_R が質量を獲得し，次に通常の電弱相互作用の対称の破れが起きて，W_L とともにクォークやレプトンも質量を獲得すると考える．W_R の質量が十分大きければ，W_R の右巻きフェルミオン2重項に対する結合は大幅に $(\sim m_{W_L}{}^2/m_{W_R}{}^2)$ 抑制されるから，右巻きフェルミオンは，近似的に $SU(2)_R$ の1重項のように振る舞う．したがって，

$$m_R \fallingdotseq \langle \Phi \rangle_R \gg m_D \fallingdotseq \langle H \rangle_L \tag{4.18}$$

は，左右対称理論の枠組みの中では自然な設定である．左右対称モデルは大統一理論の枠組みの中で自然に現れる（例えば $SO(10)$ モデル)．以上の議論で，標準理論の $SU(2)_L \times U(1)$ という枠組みを，$SU(2)_R \times SU(2)_L \times U(1)$ に拡張することにより，ニュートリノの質量の有限性と小ささが自然に説明できることがわかる．

b. 右巻きボソンの質量の現象論的制限

現象的には，左右対称理論に対する制限は，次のように与えられる．右巻き粒子に作用するゲージボソンと左巻き粒子に作用するゲージボソンは混合角 ξ で混合し，物理的に観測される質量固有状態の $W_1^{\pm}$, $W_2^{\pm}$, Z_1, Z_2 となる．通常は混合角 ξ は小さいとみなし，$W_1 \fallingdotseq W_L$, $W_2 \fallingdotseq W_R$, $Z_1 \fallingdotseq Z_L$, $Z_2 \fallingdotseq Z_R$ と考えて，$m_R \gg m_L$ とする．数値的には次のような条件がつく．

(1) m_{Z_R} の制限

Z_R が存在すると，Z_R を介する過程の寄与が加わる．すなわち，中性カレントによる断面積が変わるが，標準理論で実験データをよく説明できることから m_{Z_R} に制限ができて[9]，

$$m_{Z_R} > 370\ \mathrm{GeV} \tag{4.19}$$

(2) m_{W_R} の制限

$m(\nu_R) \ll m_\mu$ の場合：この場合，ν_R が μ の崩壊生成物として現れるが，$V+A$ 相互作用を通すので，μ の崩壊の V-A 相互作用からのズレがあるかどうかを見れば，W_R の存在がわかる．最も厳密な制限は，静止した偏極 μ の崩壊で測定したミシェルパラメター (ξ) の測定から得られる[10]．

$$m_{W_R} > 549\ \mathrm{GeV}$$
$$\zeta < 0.033 \tag{4.20}$$

$m(\nu_R) \gtrsim m_\mu$ の場合：W_R があると，W_L と同様の過程により中性 K 中間子の質量差に寄与する（図2.6の箱型図の中の $W_L \to W_R$ とする）．クォークの混合行列が左右対称とすれば，この寄与は計算できて

$$\Delta m_K \fallingdotseq (\Delta m_K)_{SM}\left[1-430\left(\frac{m_{W_L}}{m_{W_R}}\right)^2\right] \tag{4.21}$$

SM の指標は標準理論の意味である．質量差は標準理論でほぼ説明できることから，

$$\left(\frac{m_{W_L}}{m_{W_R}}\right) < \frac{1}{430} \Rightarrow m_{W_R} > 1.6\ \mathrm{TeV} \tag{4.22}$$

がいえる[10,11]．なお，QCD 補正を考慮すると m_{W_R} の下限はさらに 2 倍大きくなる[12]．上記議論の結論は，m_{Z_R}, m_{W_R} の質量が十分大きければ，左右対称モデルの存在は現在のデータと矛盾しないということである．

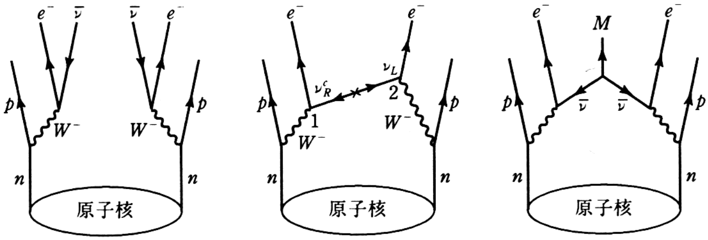
4.2 レプトン数非保存テスト

マヨラナ粒子が存在するということはレプトン数が保存しないということである．レプトン数非保存のテストで重要なのは 2 重 β 崩壊である[13,14]．2 重 β 崩壊とは原子核が電子を 2 個放出して，原子番号が 2 大きい原子核に変わる反応で，2ν モードと 0ν モードの 2 種類ある．

$$2\nu\ \text{モード}：(Z) \longrightarrow (Z+2)+2e^- + 2\bar{\nu}_e \tag{4.23 a}$$

$$0\nu\ \text{モード}：(Z) \longrightarrow (Z+2)+2e^- \tag{4.23 b}$$

2ν モードは通常の β 崩壊が核内で 2 重に起きるもので（図4.2），弱い相互



(a) (b) (c)

図 4.2 2重ベータ崩壊の三つの過程
(a) 2ν モード，(b) 0ν，(c) マヨロン放出モード

作用の高次の結果として当然に期待されるものである．0ν モードは反応の前後でレプトン数が2変化していて，レプトン数保存が破れてはじめて起こる反応，つまりニュートリノがマヨラナでないと起こらない反応である．図4.2 (b) のヴァーテックス1のニュートリノとヴァーテックス2のニュートリノは，ともに電子放出に関わるので，一方が放出ならば他は吸収の関係にある．つまり，一方がヘリシティプラスであるならば，他方はマイナスでなければならない．ヘリシティが逆の成分と結合させるには，ニュートリノが質量をもつか (この場合，逆のヘリシティ成分が$\sim(m_\nu/m_e)^2$程度存在する．I-(3.97) 参照)，あるいは $V+A$ 相互作用をもつかのどちらかまたは両方が必要である．実験的には，0ν モードと 2ν モードは，2個の電子のエネルギー和が，一定の値をとるか連続スペクトルとなるかで区別ができる (図4.3)．2重ベータ崩壊は 10^{23} 年もしくはそれ以上の崩壊寿命をもち，自然環境による背景雑音 (宇宙線もしくは測定器を構成する物質内のアイソトープからの乱雑信号) の影響の除去が困難な実験である．2ν モードは観測されていて[15]，

$$^{100}\mathrm{Mo} \to {}^{100}\mathrm{Ru}+2e^-+2\bar{\nu} \qquad \tau_{1/2}=7.6^{+2.2}_{-1.4}\times10^{21}\text{ 年} \tag{4.24}$$

$$^{76}\mathrm{Ge} \to {}^{76}\mathrm{Se}+2e^-+2\bar{\nu} \qquad \tau_{1/2}=1.77\pm0.01^{+0.13}_{-0.11}\times10^{21}\text{ 年} \tag{4.25}$$

を与えるが，0ν モードは検出されていない．現在，最良の上限値はゲルマニウム (Ge) から得られていて[16]，

$$\tau_{0\nu}>1.1\times10^{25}\text{ 年} \tag{4.26}$$

これを，ニュートリノ質量の上限値に換算するには原子核行列の知識が必要であるが，1桁くらいの不定性を伴う．

しかし，0ν モードに現れる行列要素は 2ν モードに現れる行列要素と同じであるので，2ν モードが測定できている場合の両モードの比は信用できると考えられる．種々の計算を総合してマヨラナニュートリノの質量の上限値は[17)]

$$\langle m_\nu \rangle < 1\sim 5\ \mathrm{eV}^{*3)} \tag{4.27}$$

となる．

左右対称モデルでは，$V+A$ に結合する相互作用が存在する．$V+A$ 結合定数の $V-A$ 結合に対する比を λ とすると，実験的には，

$$\lambda \lesssim 1.1\times 10^{-6} \tag{4.28}$$

を与える．ただし，モデル計算をすると，軽-重ニュートリノの混合角 θ という余分のパラメターが入るので，W_R-W_L の混合角 ζ や m_{W_R} に対する制限はあまりつけられない[13)]．

マヨロンが存在すれば，2個のニュートリノがマヨロンとなる過程が存在する（図4.2 (c)）．このときは 2ν モードのスペクトルの形が変わるので検知できる（図4.3 (c)）．実験的には 2ν モードの電子エネルギースペクトルがマヨロンがないとしたときのスペクトルに よく合うので，マヨロンに制限がつけら

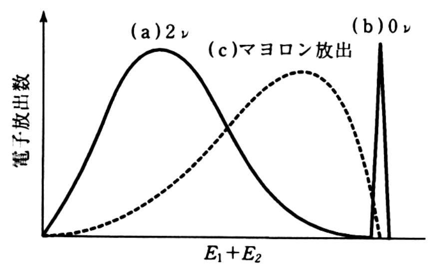


図 4.3 2重ベータ崩壊における電子のエネルギースペクトル
(a) 2ν モード，(b) 0ν，(c) マヨロン放出

---

*3) ニュートリノに香りの混合が存在するときは，2重ベータ崩壊より求められるマヨラナ質量は，$\langle m_\nu\rangle=\sum_j \eta_j |U_{ej}|^2 m_j$ と質量固有状態の混合行列の重みをつけた平均値で置き換えねばならない．ここに，η_j は位相因子で，CP固有状態により符号を変える量である．この位相因子があるおかげで，固有のマヨラナ質量は大きいにもかかわらず2重ベータ崩壊に寄与する $\langle m_\nu\rangle$ は小さいという状況も起こりうることに注意する．ただし大方のモデルでは，$\langle m_\nu\rangle \fallingdotseq m_{\nu e}$ である．

れる．しかし，マヨロンは ν_R 2個からつくられるのでアイソスピン1をもち，すでに述べたように，LEP の Z 崩壊の実験結果で否定されている．

4.3　ニュートリノの電気的性質

ニュートリノの電磁的性質は，次の電流の形状因子を調べることにより得られる．

$$\langle\nu(p',\lambda')|J_{EM}{}^{\mu}|\nu(p,\lambda)\rangle$$
$$=\bar{u}(p',\lambda')[\gamma^{\mu}\{F_1(q^2)-\gamma^5G_1(q^2)\}+\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\{F_2(q^2)-\gamma^5G_2(q^2)\}]u(p,\lambda) \tag{4.29}$$

ここに，$q^{\mu}=p^{\mu}-p'^{\mu}$ である．第1,2項は電気分布を与え，第3項が磁気能率，第4項が電気双極子能率を与える．電気双極子は T 保存を破るので以下の議論では考えないことにする．

4.3.1　電　荷　分　布

ν_L に対しては，γ^5 は単に -1 を与えるのみであるので，ν_L の電気形状因子を $Q(q^2)=F_1(q^2)+G_1(q^2)$ と書く．ニュートリノの電荷の広がりの平均自乗半径を r とすると，形状因子 $Q(q^2)$ は $\rho(\boldsymbol{r})$ を電荷分布関数として

$$Q(q^2)\equiv\int\rho(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=Q(0)+q^2\langle r^2\rangle/6+\cdots \tag{4.30}$$

と書けるから，ニュートリノの全電荷（上式第1項）は0であっても，電磁相互作用が可能となる．ニュートリノの電磁形状因子を発生する過程は図4.4で与えられる．計算によれば[18]，

$$\langle r^2\rangle_{\nu_\mu}\doteqdot\{(9\pm1)\times10^{-17}\,\mathrm{cm}\}^2 \tag{4.31}$$

を与える．ν_e,ν_τ の $\langle r^2\rangle$ 値は20～30%の範囲で ν_μ の値にほぼ等しい．この電気分布効果は，現象的には Z^0 のベクトル結合定数の値の変化 $g_V\to g_V+\delta g_V$（または同じことであるが $\delta\sin^2\theta_W$）として現れる．

$$\delta g_V=\frac{\sqrt{2}\pi\alpha}{3G_F}\langle r^2\rangle=2.38\times10^{30}\,\mathrm{cm}^{-2}\langle r^2\rangle \tag{4.32}$$

$\sin^2\theta_W$ の値の世界平均値と $\nu_\mu e$ 散乱データから導いた値との差を電荷分布に

よる効果とすれば,

$$-6\times10^{-32} < \langle r^2\rangle < 2\times10^{-32}\,\mathrm{cm}^2 \tag{4.33}$$

が得られ[1], 計算値の精度にあと一息というところである.

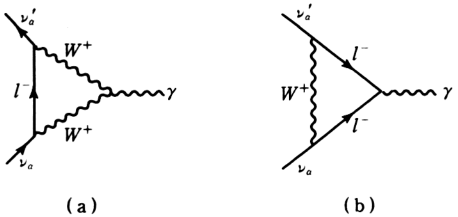


図 4.4 ニュートリノと電磁場との相互作用を示すファインマン図

4.3.2 磁 気 能 率

γ 行列の性質から任意のフェルミ場 χ, ϕ に対し,

$$\overline{\chi_L}\sigma^{\mu\nu}\phi_L=\overline{\chi_R}\sigma^{\mu\nu}\phi_R=0 \tag{4.34}$$

が成立するから, 磁気相互作用はスピンを反転する. したがって, 2 成分のワイルニュートリノは磁気能率をもてない. ディラックニュートリノならば可能である. 次にマヨラナニュートリノを考察するために, (4.29) の磁気能率項をニュートリノが複数の香りをもつ場合に一般化して, マヨラナニュートリノを $N_i=n_{iL}+n_i{}^c{}_R$ と書くと, 磁気能率による相互作用ラグランジアンを次のような形に書き表せる.

$$\begin{aligned}-\mathscr{L}&\sim(\mu_{ij}/2)\overline{N}_i\sigma^{\mu\nu}N_jF_{\mu\nu}\\&=(\mu_{ij}/2)(\overline{n}_{iL}\sigma^{\mu\nu}n_j{}^c{}_R+\overline{n}_i{}^c{}_R\sigma^{\mu\nu}n_{jL})F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.35}$$

次に, $n_j{}^c{}_R=C\overline{n}_{jL}{}^T$ を使えば,

$$\overline{n}_{iL}\sigma^{\mu\nu}n_j{}^c{}_R=-n_j{}^c{}_R{}^TC^{-1}\sigma^{\mu\nu}C\overline{n}_{jL}{}^T=-\overline{n}_{jL}\sigma^{\mu\nu}n_i{}^c{}_R \tag{4.36}$$

であるから,

$$\mu_{ij}=-\mu_{ji} \tag{4.37}$$

となる. したがって, 対角項はなく, マヨラナニュートリノは自分自身では磁気能率をもてない. しかし, 非対角項は存在しうるから, 2 種以上のマヨラナニュートリノが存在するときは,

$$n_i \longrightarrow n_j + \gamma \tag{4.38}$$

によって，磁場と相互作用が可能である（遷移磁気能率をもつ）．すなわち，ニュートリノが磁気能率をもつことがわかればそれはディラック粒子であるが，磁場による相互作用があるからといって，ディラック粒子と証明されたことにはならない．

標準理論で，図 4.4 のループ図を計算すると[19]，

$$\mu_\nu \equiv \kappa\mu_{\mathrm{Bohr}} = \kappa\left(\frac{e}{2m_e}\right)$$

$$\kappa \sim \frac{3G_F}{4\sqrt{2}\pi^2}m_\nu m_e \sim 3\times10^{-19}\left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right) \tag{4.39}$$

となり，非常に小さい．

磁気能率 μ_ν をもてば，電子と散乱が可能であり，断面積が

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E_e} = \frac{\pi\alpha^2\mu_\nu{}^2}{m_e{}^2}\left[\frac{1}{E_e - m_e} - \frac{1}{E_\nu}\right] \tag{4.40}$$

だけ増加する[20]．E_ν は入射ニュートリノのエネルギー，E_e は散乱された電子のエネルギーである．

原子炉，加速器による実験データは，ニュートリノの磁気能率効果を含まない標準理論でよく説明できているから，これから，μ_ν の上限が求められる[2]．

$\mu_\nu(\nu_e) < 1.8\times10^{-10}\mu_B$ (4.41 a)[21]

$\mu_\nu(\nu_\mu) < 7.4\times10^{-10}\mu_B$ (4.41 b)[21]

$\mu_\nu(\nu_\tau) < 5.4\times10^{-7}\mu_B$ (4.41 c)[22]

地上の実験値制限よりは多少強い制限が，恒星の冷却機構考察より得られる．星の中では，フォトンが質量をもつプラズモン γ^* になっていて，$\gamma^* \to \nu\bar{\nu}$ 反応を引き起こす．ニュートリノは超高密度星でない限り星の内部の物質との相互作用は無視できるのでそのまま外部にエネルギーをもちさり，恒星の燃焼による進化を促進する．ニュートリノが磁気能率をもてば，その分冷却作用が大きくなる．この効果は，恒星の進化の後期で特に著しい．恒星の冷却速度が観測結果と矛盾しない範囲におさめると，μ_ν に対する上限が得られる．

$\mu(\nu_e) < 1.1\times10^{-11}$ 恒星冷却（$\gamma^* \to \nu\bar{\nu}$） (4.42 a)[23]

$< (2\sim3)\times10^{-12}$ 赤色巨星 (4.42 b)[24]

$< 0.5\times10^{-10}$ 宇宙元素合成（$\nu_L e \to \nu_R e$） (4.42 c)[23]

$$< 3\sim5\times10^{-13} \qquad \text{SN1897A} \tag{4.42 d}$$ [25)]

宇宙元素合成の議論は，ビッグバン直後電弱相互作用によりつくられる ν_R が，宇宙のエネルギー密度をあまり大きくしないという条件（宇宙のヘリウム，重水素組成などを乱す）から得られる．超新星 SN1987A に関する考察は§4.7.3 で後述する．

天体物理の議論は，かなり定性的な取扱いを含むので，3 種のニュートリノがもつ一番大きな磁気能率に対しての制限は，大ざっぱに言って

$$\mu_\nu < 10^{-12}\mu_B \tag{4.43}$$

としてよいであろう．いずれにせよ，標準理論の予想値とはかけ離れた大きさの精度でしか抑えられていない．逆にいえば，上記の実験の上限値を下回るが，標準理論予想値よりは大きい値が見つかれば，それは新現象の証拠ということになる．

4.4 ニュートリノ混合

4.4.1 ニュートリノ質量の直接測定

ニュートリノには 3 種類の香りの状態 $\nu_f(f=e,\mu,\tau)$ がある．これは一般には質量固有状態 $\nu_j(j=1\sim3)$ と一致しないから，異種ニュートリノ間の混合が起こる可能性がある．

$$|\nu_f\rangle=\sum_j U_{fj}|\nu_j\rangle \tag{4.44}$$

ここに，U_{fj} はクォークセクターの小林-益川行列に対応する混合行列である．この場合，香りの固有状態の質量は各質量の加重平均で表される．またある香りの状態が現れるときは，それと結合している質量固有状態がすべて現れることを意味するので，次のような現象が期待できる[26)]．

(1) $K^\pm(\pi^\pm)\to\mu^\pm\nu_j$, $e^\pm\nu_j$ の崩壊が ν_j と ν_μ, ν_e との混合を通じて，$|U_{fj}|^2$ に比例する確率で起きる．このとき，$\mu(e)$ のエネルギースペクトルには，m_j に対応するところに山ができる（図 4.5 (a)）．

(2) ベータ崩壊のような 3 体崩壊では，カーリープロット（エネルギースペクトル）の中で，m_j に対応するところが階段状（図 4.5 (b)）になる．

(3)　ν_j が μ や電子より重ければ，さらに μ や e に崩壊できる (図 4.6 (a)).

このときの検出方法は，いわゆるビームダンプの実験にニュートリノ検出器を組み合わせて得られる (図 4.6 (c)). 1次陽子ビームが標的を叩いて，π や K 中間子を生成しニュートリノ (ν_μ もしくは ν_e) に崩壊してニュートリノビームとなるとき，混合が存在すれば，$|U_{i\mu}|^2$ または $|U_{ie}|^2$ に比例する確率で重い ν_i がつくられる．この重い ν_i は，通常のニュートリノと同じくニュートリノ検出器のところまで飛来して，そこで再び $|U_{i\mu}|^2$ または $|U_{ie}|^2$ に比例する確率で $\mu+(e\nu_e)$ もしくは $e+(\mu\nu_\mu)$ に崩壊し，異種レプトン対 $(e\mu)$ の特徴的信号を出す．したがって，μe 対の生成率より $|U_{fi}U_{if'}|^2(f, f'=\mu$ または $e)$ が測定できる[27].

(4)　香りの固有状態が時間的に変化する．これは例えば，ν_μ が生成されても時間がたつと ν_e になったりする現象であり，ニュートリノ振動と呼ばれる[28].

(1)，(3) の過程は，K または π の崩壊で生成されるので，$1 \lesssim m_j \lesssim 490$ MeV 領域で，(2) の過程は，原子核 β 崩壊で生成されるので，$1\,\mathrm{keV} \lesssim m_j \lesssim 1\,\mathrm{MeV}$ 領域で，有限質量のニュートリノを探すのに適している．現在までの実験では検出されておらず，$|U_{fj}|^2 < 10^{-3}-10^{-6}$ という制限が得られている (図 4.7[29])[*4].

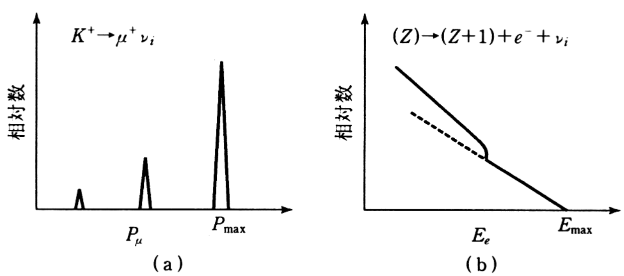


図 4.5　ニュートリノ混合が存在して，質量固有状態が混在しているときのエネルギー運動量スペクトル

(a)　2体崩壊では $m_{\nu i}>0$ であると，それぞれの対応するところに山が生じ，その大きさは $|U_{\alpha i}|^2$ (図は $\alpha=\mu$) に比例する．

(b)　ベータ崩壊などの3体崩壊では，カーリプロットが直線でなく，$E_{max}-m_{\nu i}$ に対応するところが階段状となる．

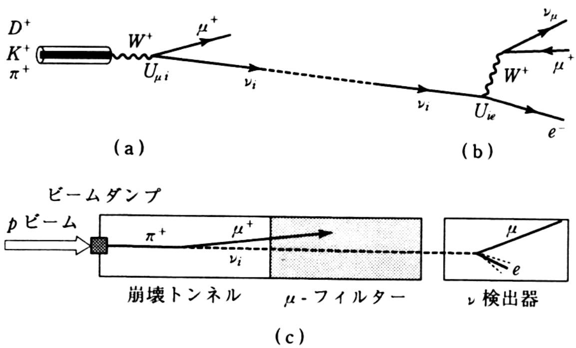


図 4.6 ビームダンプによる重いニュートリノの探求

陽子ビームを標的にあてて，D, K, π を生成させる．標的が薄ければ，K, π が崩壊するとき，重いニュートリノができ，μ-フィルターを通過した後，ニュートリノ検出器のところで崩壊して $\mu^{\pm}e^{\mp}$ という信号を与える．標的を十分厚くすれば，K, π は崩壊する前に吸収されるが，短寿命の D などは崩壊できる．

(a) ν_i の生成．

(b) ν_i の崩壊のファインマン図．生成×崩壊の反応率は $|U_{\mu i}U_{ie}|^2$, $|U_{\mu i}|^4$ に比例する．

(c) ニュートリノビーム生成，検出器をビームダンプ実験装置として使用する．

(4) のニュートリノ振動では，質量そのものは測定できないが，質量の自乗差 ($\Delta m_{ij}{}^2=|m_i{}^2-m_j{}^2|$) が観測量として入ってくる．シーソーメカニズムを信じれば，$m(\nu_e)\ll m(\nu_\mu)\ll m(\nu_\tau)$ であるから，Δm^2 を決めることは質量を決めることと同等である．二重ベータ崩壊や，トリチウムベータ崩壊による質量の直接測定では，到達質量下限がたかだか 0.1～1 eV 程度であるが，ニュートリノ振動では，実験条件を適当に設定することにより（後述表 4.1），$\Delta m^2 \fallingdotseq 1\,(\mathrm{keV})^2 \sim 10^{-11}(\mathrm{eV})^2$ の領域で測定が可能である．(1), (2), (3) の方法で見つからなかったこと，理論の予想値 (4.16) は非常に小さい質量値を与えることなどから，質量は 1 eV よりはるかに小さいと考えられる．このとき，質量検出に使える現象は，ほぼユニークにニュートリノ振動に限定される．

4.4.2 ニュートリノ振動

異種ニュートリノ間の振動現象を正確に扱うには，3 種間の遷移を同時に解

---

*4) ベータ崩壊のスペクトルの精密測定より，$m_\nu=17$ keV のニュートリノが存在するという実験データが一時話題となったが[30]，この存在は否定された[31]．

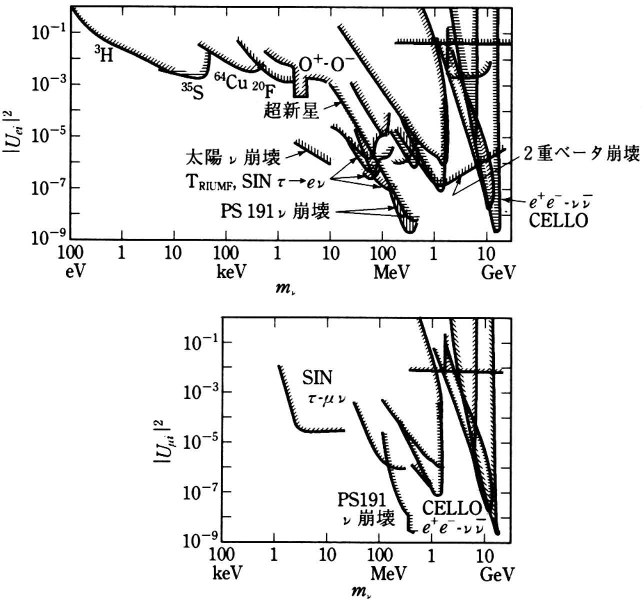


図 4.7 2体，3体崩壊で得られた重いニュートリノ i とミューオンまたは電子との混合行列要素の上限値. $m_\nu \gtrsim 1$ GeV は $e^+e^- \to \nu_i \bar{\nu}_i$ 反応, $m_\nu \lesssim 500$ MeV は K 崩壊, $m_\nu \lesssim 100$ MeV は π 崩壊, $m_\nu \lesssim 1$ MeV はベータ崩壊で得られたもの[29].

く必要があるが，通常は実験データを2種間の遷移のみを仮定した公式を使って解釈する．簡単のため ν_μ と ν_e の間の遷移のみを考えよう．この場合独立な混合行列要素はただ1個のみとなるので，混合角 θ を使って次のように表すことができる．

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle \tag{4.45 a}$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle \tag{4.45 b}$$

ν_j はエネルギー E_ν

$$E_\nu = \sqrt{p^2 + m_j{}^2} \fallingdotseq p + \frac{m_j{}^2}{2p} \tag{4.46}$$

をもつとき，時間とともに

$$|\nu_j(t)\rangle = |\nu_j(0)\rangle e^{-iE_j t} \tag{4.47}$$

のように変化する．したがって，$t=0$ で ν_e であったものが，時刻 t で ν_μ に変化する確率 $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ は簡単に計算できて，

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = |\langle \nu_\mu(0) | \nu_e(t) \rangle|^2$$
$$= (1/2)\sin^2 2\theta \{1 - \cos(E_1 - E_2)t\} \tag{4.48 a}$$

となる.

$$|E_1 - E_2| = |\sqrt{p^2 + m_1{}^2} - \sqrt{p^2 + m_2{}^2}| \sim \frac{|m_1{}^2 - m_2{}^2|}{2E} \equiv \frac{\Delta m^2}{2E}$$

を使えば,

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2(1.27 \cdot \Delta m^2 \cdot L/E) \tag{4.48 b}$$

と書ける. ただし, ここで $L=ct$ はニュートリノ発生点より測定点までの距離をメートル(m)で, Δm^2 は $(\mathrm{eV})^2$ で, エネルギー E は MeV の単位で表した. また振動の波長 λ は

$$\lambda(m) = 2\pi / |E_1 - E_2| \fallingdotseq 4\pi E / \Delta m^2$$
$$= 2.5E(\mathrm{MeV}) / \Delta m^2(\mathrm{eV})^2 \tag{4.49}$$

となる. ν_e が ν_e のままで残る確率は,

$$P(\nu_e \to \nu_e) = 1 - P(\nu_e \to \nu_\mu) \tag{4.50}$$

で与えられる. この式からわかるようにニュートリノ振動は, 混合があり ($\theta \neq 0$) かつ質量差があって ($\Delta m^2 \neq 0$) はじめて起こる現象であることがわかる. 測定にかかる質量の目安は,

$$L/\lambda \sim \Delta m^2 \cdot L/E \sim 1 \tag{4.51}$$

で与えられるので, E/L をうまく選ぶことにより, Δm^2 の小さい領域の探索が可能となる. 表 4.1 に主なニュートリノ源と測定できる Δm^2 の目安を与える.

実験的には, 最初 ν_e ビームをつくっておいた上で, 下流で ν_μ が現れるかをみる"出現の実験"と, 2 カ所以上の地点で ν_e の数を測定し, ν_e の数の変化をみる"消滅の実験"との 2 種類の方法がある. 技術的には出現の実験の方が容易であるが, 測定数値が混合行列要素を含むので, 仮に振動が存在しても混合が小さいと測定にかからないという難点がある. 一方, 消滅実験は, 技術的にはより困難であるが, 混合行列の大小やニュートリノ種の数, またニュートリノが振動によって変化する先のニュートリノの種類 (例えば, ここでは考慮しなかった $\nu_L \to \nu_R$, $\nu \to \bar{\nu}$ の可能性を含む) にもよらずに, ニュートリノ振動の有無を一般的に決定できるという利点がある.

表 4.1 ニュートリノ振動による Δm^2 探索領域の目安

ニュートリノ源	エネルギー E (MeV)	距離 L (m)	質量差 Δm^2 $(\mathrm{eV})^2$
加速器	$10^3 \sim 10^5$	$10^2 \sim 10^6$	$10^{-3} \sim 100$
π 中間子工場	~ 30	$10 \sim 10^2$	$10^{-2} \sim 0.1$
原子炉	$1 \sim 2$	~ 20	$10^{-2} \sim 0.1$
宇宙線	~ 1000	$\sim 10^{7}$(%)	$\sim 10^{-4}$
太　陽	~ 1	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{-11}$

(%) 地球の直径

ニュートリノ振動が存在すれば，混合比 $\sin^2 2\theta$ と Δm^2 を同時に決めることが可能であるが，振動が観測されないときは通常 $\sin^2 2\theta$ と Δm^2 の値の除外される領域を 2 次元プロットで表す．長波長近似 ($L \ll \lambda; \Delta m^2$ の小さい領域) では，(4.48 b) は

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) \fallingdotseq \sin^2 2\theta (1.27 \cdot \Delta m^2 \cdot L/E)^2 \qquad (4.52\,\mathrm{a})$$

となる．ニュートリノ振動が見つからないときは，実験誤差を δ として，上限値

$$\sin 2\theta \cdot \Delta m^2 < \frac{E}{L}\sqrt{\delta} \qquad (4.52\,\mathrm{b})$$

が与えられる．逆の短波長近似 ($L \gg \lambda; \Delta m^2$ の大きい領域) では，E が幅をもつこと，ニュートリノ源や測定地点が広がっていることなどを考慮すると，振動は平均化されて，

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu) &= \sin^2 2\theta \langle \sin^2(1.27 \cdot \Delta m^2 \cdot L/E) \rangle \\ &\fallingdotseq (1/2) \sin^2 2\theta < \delta \end{aligned} \qquad (4.53)$$

となり，混合比の上限値のみ求められる．加速器実験では $\delta \fallingdotseq O(10^{-3} \sim 10^{-4})$ まで可能であるが，原子炉や宇宙線を使う方法では $\delta \gtrsim 0.1$ であり，混合角に対する感度は大きくない．

Δm^2 の小さい領域を調べるには，E/L が小さいほど有利である．表 4.1 より太陽ニュートリノを測定するのが最も感度がよいことがわかる．図 4.8 にこれまでの加速器や原子炉による振動実験で除外された領域を示す[32]．加速器や原子炉での振動実験の結果，探索可能な領域は，わずかな例外[*5] を除きほぼ

つきたので，Δm^2 の小さな領域に進出したい場合は，宇宙線もしくは太陽ニュートリノに求めざるをえない．

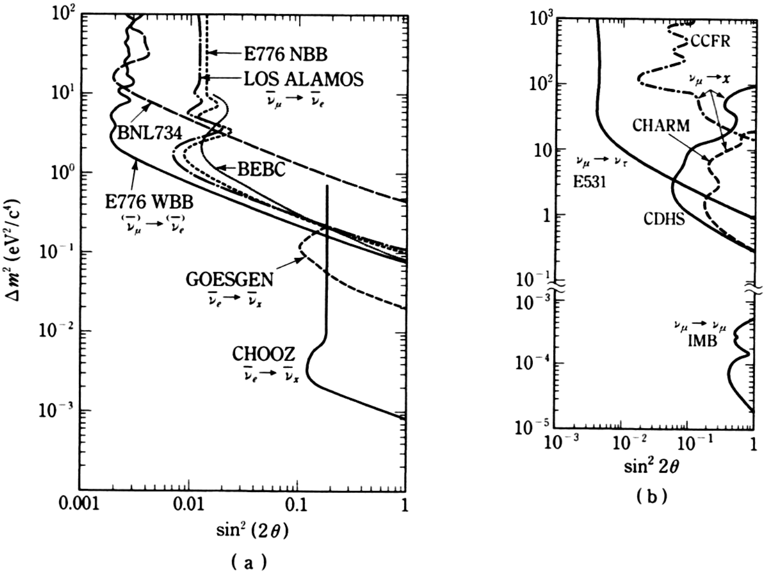


図 4.8 加速器，原子炉におけるニュートリノ振動実験での許容範囲
除外される領域は各線の右上側．
(a) $\nu_\mu \to \nu_e$，$\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e$，$\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_x$
(b) $\nu_\mu \to \nu_\tau$，$\nu_\mu \to \nu_\mu$，($\nu_\mu \to x$)
GOESGEN，CHOOZ が原子炉，IMB が宇宙線によるデータで，それ以外はすべて加速器のデータ[32]．

4.5 ニュートリノ天文学[34]

4.5.1 太陽ニュートリノの謎

a．標準太陽モデル (SSM : standard solar model)

太陽ニュートリノは，太陽の中心での熱核融合反応

---

*5) $L \gtrsim 100\sim1000$ km 以上もとる長基線振動実験はこれからである．例えば，筑波の高エネルギー物理学研究機構の陽子シンクロトロンでニュートリノビームをつくり，岐阜神岡のスーパーカミオカンデで振動を検出する計画 (K2K) が進行中である[33]．また，アメリカのフェルミ研究所-スーダン鉱山 (MINOS)，セルン-グランサッソの研究所にも同様な計画がある．

$$2e^- + 4p \longrightarrow {}^4He + 2\nu_e + \gamma \ (26.73\ MeV) \qquad (4.54)$$

の際放出されるもので，その正体は電子ニュートリノである．熱核融合反応は主として pp チェインと呼ばれるさまざまな原子核反応（図 4.9）の結果として起こるものであり，放出されるニュートリノのエネルギースペクトルを図 4.10 に示す[35]．なお，中心温度が 2×10^7 度を超える場合（太陽より重い恒星）では，同じヘリウム生成反応でも C, N, O を触媒とする CNO チェインが効くが，これはまったく違ったエネルギースペクトルをもつので区別は容易である．

b．太陽ニュートリノの検出

i）ホームステイク実験　最初に太陽ニュートリノフラックスを測定したのはアメリカのホームステイクに設置したニュートリノ検出器であり，1968 年にまでさかのぼる[36]．方法は

$$\nu_e + {}^{37}Cl \longrightarrow {}^{37}Ar + e^- \qquad (4.55)$$

の反応（エネルギーしきい値：$E_\nu > 0.81$ MeV）を用いる．宇宙線による偽信号を防ぐため，615 トンの液体 2 塩化炭素 (C_2Cl_4) をアメリカのサウスダコタ

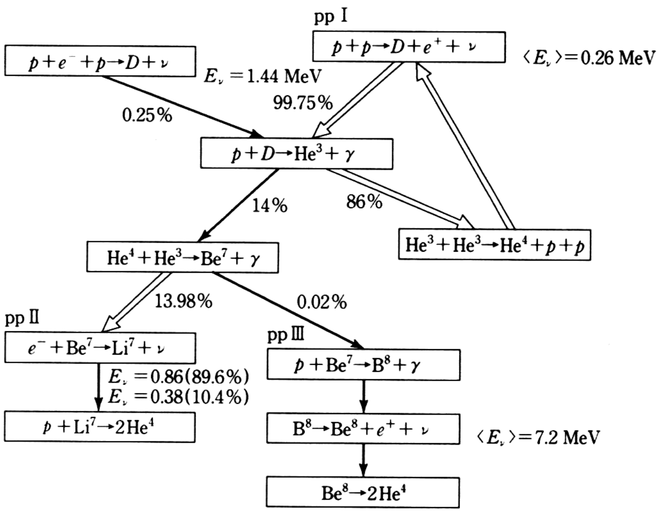


図 4.9　太陽の熱核融合反応：pp チェイン

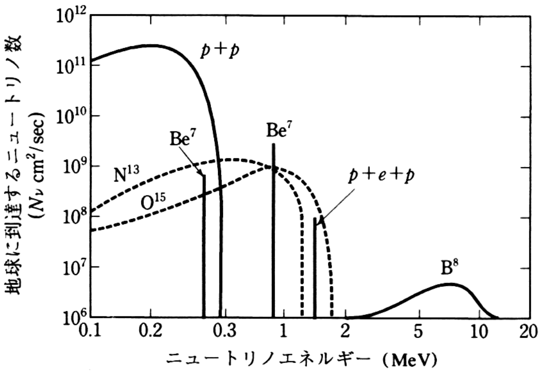


図 4.10 太陽ニュートリノのエネルギースペクトル
実線が p-p チェインによるもので，破線が CNO サイクルによるもの.

州にあるホームステイク金鉱の地下 1620 m に設置した．さらに中性子起因の雑音を防ぐため装置全体を水のプールの中に沈める．ニュートリノによって生成されるアルゴン原子核は，軌道電子を捕獲して半減期 35 日でもとの塩素にもどるが，装置を 35 日以上働かせれば間断なくつくられる数と，もとにもどる数とがつり合い，液体 2 塩化炭素の中には一定量のアルゴンが存在するようになる．このアルゴンは気体となって浮いているのでヘリウムガスを送り込んで取り出し，活性炭に吸わせて回収する．アルゴンは塩素にもどるとき，特性 X 線を放射するので，この X 線の数を比例計数管で測ればアルゴンの数，したがってニュートリノの反応率が測定できる．この方法は，一定期間アルゴンを貯める方式なので，ニュートリノがどのくらいのエネルギーをもち，いつ，どの方向からきたかということはわからない．ホームステイク測定器は，ニュートリノ捕獲率を，

$$2.33 \pm 0.25 \text{ SNU} \tag{4.56}$$

と測定した[37]（図 4.11)．ただし，SNU とは Solar Neutrino Unit の略で，1 capture/sec/10^{36}atoms のことである．一方，標準太陽モデル[35]は

$$9.3^{+1.2}_{-1.4} \text{ SNU} \tag{4.57}$$

を与えるので，観測値は理論の 1/3 程度しかない．このモデルの 1σ という誤差は，理論的な 3σ（σ：自乗平均誤差）に相当する値を採用している．別の計算では 6.4±1.4 SNU を与えるが[38]，理論値が大幅に大きいことは変わりな

い．これが太陽ニュートリノの謎と呼ばれるものの実体である．太陽ニュートリノの謎は，提起されてからもう20年以上にもなる．この原因を太陽モデルに求めれば天体物理の問題となり，ニュートリノ自身の性質（ニュートリノ振動）に求めるならば素粒子の問題となるのである．

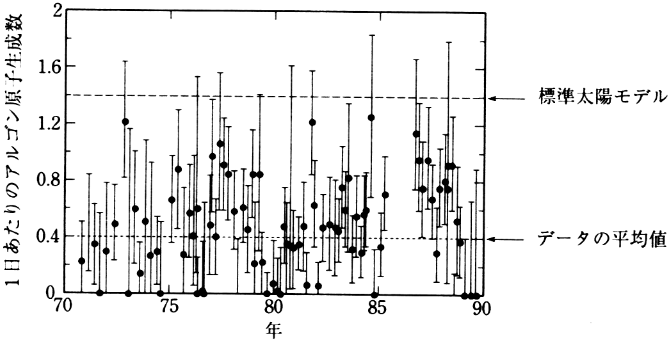


図 4.11　ホームステイク鉱山の ^{35}Cl による太陽ニュートリノ捕獲率
1日あたりのアルゴン生成率を示す．長破線が標準太陽モデル．短破線でデータの平均値を示す[36,37]．

ii）神岡実験　これに対して，神岡地下実験グループは，水タンクの壁に光電子増倍管を並べた測定器を使って太陽ニュートリノを測定した[39]．この水チェレンコフ測定器はもともとは大統一理論の検証を目的とした陽子崩壊検出のために建設されたものであるが，天然に存在するウランからの背景雑音を減らして，検出可能な粒子の最小エネルギーを6～7 MeVにまで下げることによって，太陽ニュートリノ検出器としても機能できるようにしたものである．ニュートリノ自身は中性で検出できないが，ニュートリノ反応

$$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^- \tag{4.58}$$

によって放出される電子は，水の中でチェレンコフ光を発するので，光電子増倍管で感知できるのである．リングパターンから電子の同定ができ，光量からエネルギーが測定できる（図4.12 (b),(c)）．反跳電子の方向は，ニュートリノの入射方向とかなりよい精度で一致するので，ニュートリノの到着時間と飛来方向がわかる．その意味で，ホームステイク測定器より一段進んだニュートリノ測定器であり，ニュートリノ望遠鏡としての資格を備えているといってよいであろう．現在は改良型でさらに大型の5万トン検出器（スーパーカミオカ

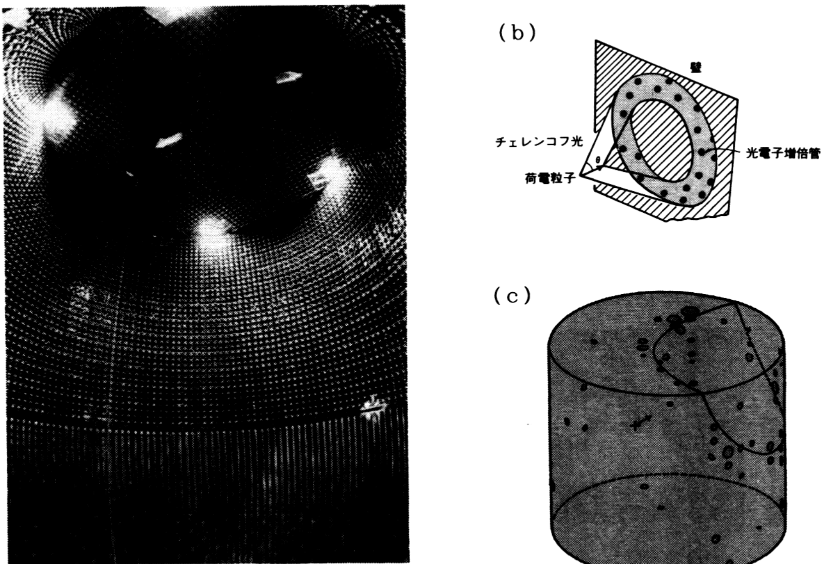
ンデ：図 4.12 (a)) が稼働している．

図 4.13 (a) は，$\nu_e e$ 反応データ[39] をニュートリノ飛来方向の関数として示しており，0 度すなわち太陽方向に明瞭な信号が見られる．図 4.13 (b) にエネルギースペクトルを示す．スーパーカミオカンデの観測値は，

$$N_\nu = 2.44 \pm 0.05(\text{stat})^{+0.09}_{-0.07}(\text{sys}) \times 10^6/\text{cm}^2/\text{s} \ (E_e > 6.5\ \text{MeV}) \tag{4.59 a}$$

$$\frac{N\ (\text{観測})}{N\ (\text{理論})} = 0.474^{+0.010+0.017}_{-0.009-0.014} \tag{4.59 b}$$

であり，SSM 理論値 (BP98[35]) の約 1/2 という値を与えている．デイヴィス



(a)

図 4.12 神岡水チェレンコフ測定器（スーパーカミオカンデ）
岐阜県神岡鉱山地下 1000 m に設置してある．（東京大学宇宙線研究所提供）

(a) スーパーカミオカンデ検出器．光電子増倍管を取り付け後注水しているところ．スーパーカミオカンデは直径 40 m，高さ 42 m の水タンクの内壁に径 50 cm の光電子増倍管を約 1 万本配置してある．

(b) 荷電粒子が水中を走るとチェレンコフ光を出し，光電子増倍管が感知する．

(c) チェレンコフ光受信の実際例．前身のカミオカンデ検出器による超新星ニュートリノの観測の一例で，図中『＋』から電子が矢印の方向へ向かって走った．丸印が光った光電子増倍管を表し，丸の大きさが光量を表す．リングパターンが見える．

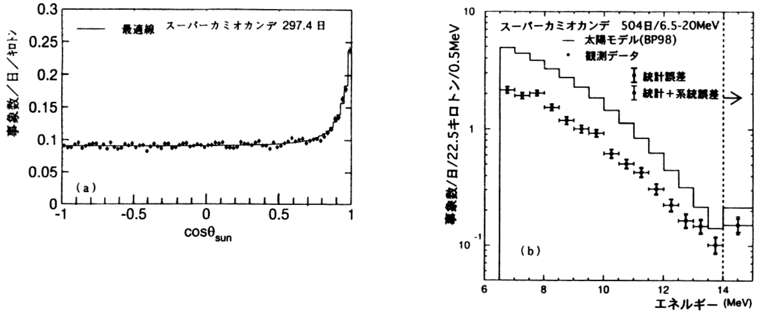


図 4.13　神岡の太陽ニュートリノデータ[39,40]

(a)　反跳電子の方向と太陽方向とのなす角の余弦としてプロットしたもの．太陽方向に明瞭な山が見える．実線は最適化曲線．

(b)　反跳電子のエネルギースペクトル．黒丸がデータで，ヒストグラムが太陽標準モデル．

らと値はやや異なるものの，標準太陽モデルの予想より大幅に小さいという太陽ニュートリノの謎問題の存在は再確認したといえる．

iii）ガリウム実験　上記二つの実験は，いずれも太陽ニュートリノエネルギースペクトルのエネルギーの高い部分にのみ感じる．有感領域は，エネルギースペクトル全体から見ればごくわずかであり，太陽モデルの不定性の大きいところでもある．そこで，pp-I チェインのエネルギーの低いところ ($E_\nu \lesssim$ 0.5 MeV) を観測することが重要となる．塩素 (Cl) の代わりにガリウム (Ga) を使用するとエネルギーの低いニュートリノ ($E \gtrsim 233$ keV) に感じるので，スペクトルの低エネルギー側が測定できる．Ga を含む太陽ニュートリノ検出器は，現在ロシアの SAGE[41] とイタリアの GALLEX[42] の 2 カ所で稼働している．これらの実験は，ホームステイクの塩素標的の実験と手法が同一であり，リアルタイムではニュートリノを捕まえられない．

標準モデルでは 137±8 SNU 期待されるのに対して[35]，現時点（1998 年 10 月）では，

$$73\ {}^{+18}_{-16}(\text{stat})^{+5}_{-7}(\text{sys})\quad \text{SNU}\quad \text{SAGE} \tag{4.60}$$

$$69.7 \pm 6.7(\text{stat})^{+3.9}_{-4.5}(\text{sys})\quad \text{SNU}\quad \text{GALLEX} \tag{4.61}$$

というデータがでている．太陽ニュートリノの謎は依然として，解けていないということができよう．

4.5.2 物質振動

a. 物質中でのシュレーディンガー方程式

塩素反応 (4.55) は，ニュートリノが ν_e であるならば検出できるが，ν_μ もしくは ν_τ であるならば検出はできない．ニュートリノ電子散乱は ν_μ, ν_τ でも可能であるが，断面積が小さく感度が悪い．したがって，もしニュートリノ振動が存在して，ν_e が ν_μ, ν_τ に遷移するならば測定にはかからないので，見かけ上 ν_e が消滅することになる．太陽までの距離が振動波長 λ に比べて十分大きければ，Δm^2 の値に関係なく，式 (4.53) によって，

$$P(\nu_e \to \nu_e) \fallingdotseq 1-(1/2)\sin^2 2\theta \tag{4.62}$$

となるので，$\sin^2 2\theta \fallingdotseq 1$ くらいの大きな混合が存在すればほぼ 1/2 になる．一般に N 種のニュートリノが存在するときは，$P(\nu_e \to \nu_e)$ は $1/N$ になるので，$N=3$ とすれば，太陽ニュートリノの謎はうまく説明できる（後の物質振動解に対して真空振動解という）．しかし，このように大きな混合比は，理論的には考えにくい．クォークの混合行列との類推を考えると，混合角はたかだかカビボ角くらいと考えられるからである．

1986 年にミケエフとスミルノフは[43]，混合比が 10^{-3} くらいに小さい場合でも，太陽物質の影響により共鳴振動が起こり，実験データを説明しうる可能性を示した．現在，太陽ニュートリノの謎を解決する有力な候補として注目されているのがこの物質振動解であるので，少し詳しく述べることにする．

物質の振動解は次のようにして求められる．まず真空中での質量固有状態 ν_i が満たすシュレーディンガー方程式

$$i\frac{\mathrm{d}|\nu_j(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=\left(p+\frac{m_j{}^2}{2p}\right)|\nu_j(t)\rangle \tag{4.63}$$

を考慮すれば，$|\nu_e\rangle$ と $|\nu_\mu\rangle$ が (4.45) で与えられるとき，質量項を与える行列は，ν_e, ν_μ 表示で，

$$i\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\mathcal{M}\Psi, \qquad \Psi=\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{bmatrix}\equiv\alpha(t)|\nu_e(0)\rangle+\beta(t)|\nu_\mu(0)\rangle \tag{4.64}$$

$$\mathcal{M}=\begin{bmatrix} M_{ee} & M_{e\mu} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M-\dfrac{\delta_m}{2}\cos 2\theta & \dfrac{\delta_m}{2}\sin 2\theta \\ \dfrac{\delta_m}{2}\sin 2\theta & M+\dfrac{\delta_m}{2}\cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{4.65 a}$$

$$M=p+\frac{1}{2p}\frac{m_1{}^2+m_2{}^2}{2}, \qquad \delta_m=\frac{1}{2p}(m_2{}^2-m_1{}^2)=\frac{\Delta m^2}{2p}>0 \tag{4.65 b}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2M_{e\mu}}{M_{\mu\mu}-M_{ee}} \tag{4.65 c}$$

となる．これらの式は真空中で成立する式である．

物質中では ν_e, ν_μ ともに物質との相互作用があるので上式が変更される．中性カレントによる相互作用は，ν_e と ν_μ に同じ影響を与えるので，質量 (M) を変えるが，質量差 (Δm^2) は変えず，したがって振動には影響を与えない．一方荷電カレントは，ν_e と電子との間の相互作用は引き起こすが，ν_μ には効かない．物質との可干渉な相互作用の影響は，屈折率 n の形でとりいれることができる．このとき，平面波 $\sim\exp(ipx-iEt)$ の空間部分が $p\to np$ と変化するので，もとの波動との差をエネルギー部分に取り入れるため $ct\to x$ とすると，

$$|\nu(x)\rangle=|\nu\rangle e^{ip(n-1)x}e^{-i(m^2/2p)x} \tag{4.66 a}$$

と表せる．光学でよく知られているように，屈折率を散乱振幅で表す式を使うとエネルギーの変化は

$$p(n-1)=\frac{2\pi n_e}{p}f(0)=-\sqrt{2}G_F n_e \tag{4.66 b}$$

$f(0)$：$\nu_e e$ の前方散乱振幅

G_F：フェルミ結合定数

n_e：電子数密度

となり，質量行列の中の M_{ee} が

$$M_{ee} \longrightarrow M_{ee}+\sqrt{2}G_F n_e \tag{4.67}$$

と変更される．$p\sim E$ であるから以下 p の代わりに E と書くことにする．n_e を定数とみなせば，物質解は真空解と同様にして求められる．物質内での質量行列の固有値を $\tilde{m}_\nu{}^2/2E$ とおくと，質量固有値と混合角 θ_m は，

$$\frac{\tilde{m}_\nu{}^2}{2E}=M+\frac{G_F n_e}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}[(\delta_m\cos 2\theta-\sqrt{2}G_F n_e)^2+\delta_m{}^2\sin^2 2\theta]^{1/2} \tag{4.68 a}$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \lambda\!\!\!^{-}/\lambda\!\!\!^{-}_e} \tag{4.68 b}$$

$$\lambda\!\!\!^{-} = |\delta_m|^{-1}, \qquad \lambda\!\!\!^{-}_e = (\sqrt{2} G_F n_e)^{-1} \tag{4.68 c}$$

となる．$\lambda\!\!\!^{-}(=\lambda/2\pi)$ は真空中の振動波長である．$G_F = 1.436 \times 10^{-49}\,\mathrm{erg \cdot cm^3}$ を入れると

$$\lambda\!\!\!^{-}_e = \frac{\hbar c}{\sqrt{2} G_F n_e} \fallingdotseq 2.63 \times 10^6 (\rho(\mathrm{gr/cm^3}))^{-1}\,\mathrm{m} \tag{4.69}$$

となる．ρ は密度である．太陽中での電子数密度 n_e を次の式で近似すれば[34)]

$$n_e = n_{ec} \mathrm{e}^{-x/R_0} \tag{4.70 a}$$

$$n_{ec} \fallingdotseq 98.6 N_A/\mathrm{cm^3}\,;\ N_A \text{ はアボガドロ数} \tag{4.70 b}$$

$$R_0 \fallingdotseq R_\odot/10 \fallingdotseq 7 \times 10^7\,\mathrm{m} \tag{4.70 c}$$

$R_\odot$ は太陽半径を示す．ρ は，中心では$\sim 100(\mathrm{g/cm^3})$ であるが，太陽中の典型的な値（例えば $R \fallingdotseq 0.4\,R_\odot$）は $\sim 2(\mathrm{gr/cm^3})$ である．

図 4.14 に太陽の中でのニュートリノの質量が電子密度の関数としてどう変化するかを定性的に描く（破線）．混合が存在しないとき ($\Delta m^2 \sin 2\theta = 0$)，真空中 ($n_e = 0$) では，

$$m_{\nu_e} < m_{\nu_\mu} \tag{4.71 a}$$

であるが，十分電子密度が高ければ，

$$m_{\nu_e} > m_{\nu_\mu} \tag{4.71 b}$$

となることがわかる．物質内での固有解 $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ は，ν_e と ν_μ との混合であり，

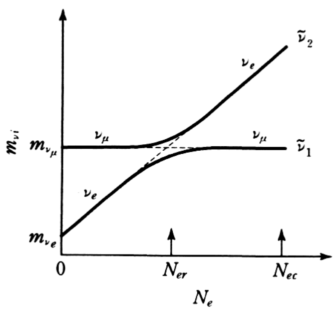


図 4.14 太陽内で質量が電子数密度 N_e の関数として変わる様子
ν_e は電子密度が大きくなると質量が大きくなる．ν_μは変わらない．物質中での固有解 $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ は ν_e と ν_μ の混合であり，$N_e \gg N_{er}$ のとき $\tilde{\nu}_2 \sim \nu_e$, $N_e \ll N_{er}$ のときは $\tilde{\nu}_2 \sim \nu_\mu$ である．N_{ec} は太陽中心の電子数密度，N_{er} は共鳴の起きる密度を示す．$N_e = 0$ が真空（太陽の外）に対応する．

図 4.14 の二つの実線に対応する．その質量は (4.68 a) で与えられ，交わることはない．二つの曲線が一番近くなるのは，$\cos 2\theta \sim \bar{\lambda}/\lambda_e$ で，最大の混合（共鳴）が起こるところである．

共鳴条件

$$\cos 2\theta = \bar{\lambda}/\lambda_e = \sqrt{2} G_F n_e/\delta_m \tag{4.72 a}$$

を $\varDelta m^2$ で書き直すと

$$\varDelta m^2 \cos 2\theta (\mathrm{eV})^2 = 1.50 \times 10^{-7} \left(\frac{E_\nu}{\mathrm{MeV}}\right)\left(\frac{\rho}{\mathrm{gr/cm^3}}\right) \tag{4.72 b}$$

であるので，$E_\nu \lesssim 10$ MeV，$\rho \lesssim 100$ gr/cm³ を考慮すると $\varDelta m^2$ の有感領域は

$$10^{-11} \lesssim \varDelta m^2 (\mathrm{eV})^2 \lesssim 10^{-4} \tag{4.73}$$

と真空振動だけの場合に比べて大いに広がったことになる．

b．断熱近似

いま，場所による密度変化が十分緩やかであるとすれば，断熱近似が成立する．この場合の解の時間依存性は，密度を定数として解いた解に密度の時間変化を入れることにより得られるので，図 4.14 の密度-質量の関係は有効である．太陽の中心で十分密度が高ければ，生成された ν_e の質量は ν_μ の質量よりも大きく，図 4.14 の上の曲線（固有解 $\tilde{\nu}_2$）上にある．ν_e が太陽の外に向かって進行するにつれ，密度が徐々に小さくなっていき，やがて共鳴混合地点に達する．共鳴混合が起きれば曲線は交差せず，外に出たときは ν_μ になっており，ν_e は消滅したことになる．これを MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein : Wolfenstein は物質中での振動理論をつくった) 効果という[43]．(4.68 b) からわかるように，真空中の混合角が非常に小さくとも共鳴混合が起こりうる可能性のあることがわかる．

共鳴が起こるためには，共鳴を起こす密度 (n_{er}) が，太陽中心密度 (n_{ec}) より小さくなければならない．共鳴条件は (4.72) で与えられている．(4.70) により $\rho_c \simeq 100$ gr/cm³ であるから，太陽中で共鳴の起きる条件は次のように表される．

$$\varDelta m^2 \cos 2\theta \lesssim 1.5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{E}{10\ \mathrm{MeV}}\right) \tag{4.74}$$

断熱近似の条件は，密度の変化によるエネルギー変化 δE が，二つの固有解

のエネルギー差 ΔE に比べて小さいことである．いい換えると，密度変化によって ΔE の変化を誘起するのに必要な距離 L_ρ が，物質中の振動波長 $\lambda_m=2E/\Delta\tilde{m}^2$ に比べて十分長いことである．密度変化によるエネルギー変化は (4.67) より $\delta E=\sqrt{2}G_F\delta n_e$ であるから，距離 L_ρ を走ったときのエネルギー変化が ΔE に等しいとおいて L_ρ が求められる．

$$\sqrt{2}G_F\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}x}L_\rho=\Delta E=\frac{\Delta\tilde{m}^2}{2E} \tag{4.75}$$

$$\therefore\quad L_\rho=\frac{\dfrac{\Delta\tilde{m}^2}{2E}}{\sqrt{2}G_F\dfrac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}x}} \tag{4.76}$$

したがって，断熱条件は

$$\gamma_m\equiv\frac{L_\rho}{\lambda_m}=\frac{(\Delta\tilde{m}^2)^2}{4\sqrt{2}G_F E^2\dfrac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}x}}\gg 1 \tag{4.77 a}$$

となる．共鳴点では，

$$\Delta\tilde{m}^2=\Delta m^2\sin 2\theta,\qquad n_e=n_{er}=\frac{\delta_m\cos 2\theta}{\sqrt{2}G_F} \tag{4.78}$$

であるので，断熱条件は

$$\gamma_m=\frac{\Delta m^2\sin^2 2\theta}{2E\cos 2\theta\dfrac{\mathrm{d}\ln n_e}{\mathrm{d}x}}\gg 1 \tag{4.77 b}$$

と書き換えられる．(4.70) を使えば

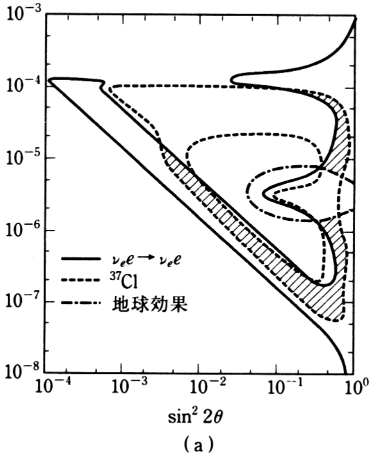
$$\left(\frac{\Delta m^2}{1\,\mathrm{eV}^2}\right)\sin 2\theta\tan 2\theta\gg 5\times10^{-8}\left(\frac{E}{10\,\mathrm{MeV}}\right) \tag{4.79}$$

となる．

c．三つの可能性

太陽ニュートリノのエネルギースペクトルが 0～14 MeV であることを考慮し，(4.74), (4.79) の条件を参照すると，物質振動の許される領域は，$\sin^2 2\theta$ -Δm^2 平面上で三つの境界に囲まれた三角形内に限られることがわかる．各境界に対応する解は，

(c-1)　解 1：断熱解：$\Delta m^2\fallingdotseq10^{-4}(\mathrm{eV})^2$, $\theta^2\gtrsim10^{-3}$ で表される境界で，図4.15の三角形の上辺部分にあたる．



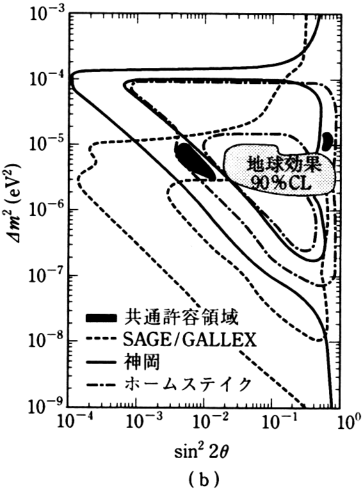


図 4.15　太陽ニュートリノの物質振動解

二つの線の内側が各データにより許される範囲で，ほぼ三角形の帯をつくる[44]．

(a)　神岡データ（実線）とホームステイクデータ（ダッシュ線）から許される領域を斜線で示してある．一点鎖線は神岡データの日夜変化（地球効果）から除外される領域．

(b)　(a) をさらに Ga データを使って領域を絞ったもの．黒影部分が 3 個のデータにすべて合う領域．灰色部分は地球効果で除外される部分．

(c-2)　解 2：準真空解：$\sin^2 2\theta \fallingdotseq 1$，$10^{-10} \lesssim \Delta m^2 \lesssim 10^{-4}$ で表される境界で，三角形の右辺に相当する．真空振動解に近いので準真空解という．

(c-3)　解 3：非断熱解：非断熱近似では，$\gamma_m \lesssim 1$ であるから，

$$\left(\frac{\Delta m^2}{\mathrm{eV}^2}\right)\sin 2\theta \tan 2\theta = \mathrm{const.} \fallingdotseq 5\times 10^{-8}\left(\frac{E}{10\ \mathrm{MeV}}\right) \tag{4.80}$$

を与える境界線は，図 4.15 の三角帯の左下辺である．

一般の振動解は，上記三つの解で囲まれた三角形の内部に存在する．解 1 の断熱解では 7 MeV 以上の ν_e がほとんどすべて ν_μ に変わる（高エネルギー側欠損）が，これより低いエネルギーではほとんど影響を与えない．準真空解では，ν_e が全エネルギーで一様に減少する．一方，非断熱解は，エネルギー E の小さいニュートリノの数を少なくする．したがって，条件を適当に選べば，三つの太陽観測実験データを同時に説明する解がありうる（図 4.15 (b)）[44]．

d. 地球の影響

物質による共鳴振動は地球でも起きる（式 (4.72) に $\rho\simeq 5\ \mathrm{gr/cm^3}$ を入れよ）．地球効果は，太陽中で $\nu_e\to\nu_\mu$ と振動したものをもとにもどす作用（$\nu_\mu\to\nu_e$）があり，ニュートリノ強度の時間で積分した値を見ている限り，物質振動解で許される範囲が広がる．地球効果は，夜間と日中のデータの差をとることにより観測できる．日夜変化が検出できなかったことから，図 4.15 (a) で $\sin^2 2\theta\gtrsim 0.1$，$\Delta m^2\sim 10^{-5.5}$ 付近の突出部分を除外できる．

e. ν_e の生き残り確率

断熱解では，$\tilde{\nu}_1$ と $\tilde{\nu}_2$ は独立で混じることはないが，一般には，共鳴領域で $\tilde{\nu}_2\to\tilde{\nu}_1$ の遷移が起きる．この確率 P_{jump} が与えられたときの，ν_e が最終的に生き残る確率は，次のようにして求められる．

まず，$t=0$ で太陽中心で ν_e が生成されたとする．$|\nu_e\rangle$ を物質固有解で展開するには，(4.45) で $\theta\to\theta_m(t=0)\equiv\tilde{\theta}$ とおいて

$$|\nu_e(t=0)\rangle=\cos\tilde{\theta}\,|\tilde{\nu}_1\rangle+\sin\tilde{\theta}\,|\tilde{\nu}_2\rangle \tag{4.81}$$

共鳴領域に到達する時刻を t_r とすると，$t\leqq t_r-\varepsilon$ では，

$$|\nu_e(t)\rangle=\cos\tilde{\theta}\exp\left(-i\int_0^{t_r-\varepsilon}\tilde{E}_1\mathrm{dt}\right)|\tilde{\nu}_1\rangle+\sin\tilde{\theta}\,\exp\left(-i\int_0^{t_r-\varepsilon}\tilde{E}_2\mathrm{dt}\right)|\tilde{\nu}_2\rangle \tag{4.82}$$

という時間発展をする．$\tilde{E}_{1,2}$ は物質中での固有エネルギーである．$t_r-\varepsilon\leqq t\leqq t_r+\varepsilon$ で，$\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ 間の遷移が起こり，$t=t_r+\varepsilon$ では，

$$|\tilde{\nu}_1\rangle\longrightarrow\quad\alpha|\tilde{\nu}_1\rangle+\beta|\tilde{\nu}_2\rangle \tag{4.83 a}$$

$$|\tilde{\nu}_2\rangle\longrightarrow-\beta^*|\tilde{\nu}_1\rangle+\alpha^*|\tilde{\nu}_2\rangle \tag{4.83 b}$$

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

になったとする．このとき，$|\nu_e(t)\rangle$ は

$$\begin{aligned}|\nu_e(t)\rangle=&\cos\tilde{\theta}\,\exp\left(-i\int_0^{t_r-\varepsilon}\tilde{E}_1\mathrm{dt}\right)(\alpha|\tilde{\nu}_1\rangle+\beta|\tilde{\nu}_2\rangle)\\&+\sin\tilde{\theta}\,\exp\left(-i\int_0^{t_r-\varepsilon}\tilde{E}_2\mathrm{dt}\right)(-\beta^*|\tilde{\nu}_1\rangle+\alpha^*|\tilde{\nu}_2\rangle)\\=&A|\tilde{\nu}_1\rangle+B|\tilde{\nu}_2\rangle\end{aligned} \tag{4.84}$$

となる．$t>t_r+\varepsilon$ では再び，(4.82) と同様な時間発展をするが，$t\to\infty$ では，太陽外に出て，

$$|\tilde{\nu}_1\rangle,\ |\tilde{\nu}_2\rangle \xrightarrow{t\to\infty} |\nu_1\rangle,\ |\nu_2\rangle \tag{4.85}$$

となるから，再び (4.45) を使ってもとの ν_e, ν_μ で書き直すと

$$|\nu_e(t=\infty)\rangle = A\exp\left(-i\int_{tr+\varepsilon}^{\infty}\tilde{E}_1\mathrm{dt}\right)(\cos\theta|\nu_e\rangle - \sin\theta|\nu_\mu\rangle)$$
$$+B\exp\left(-i\int_{tr+\varepsilon}^{\infty}\tilde{E}_2\mathrm{dt}\right)(\sin\theta|\nu_e\rangle + \cos\theta|\nu_\mu\rangle) \tag{4.86}$$

これから，

$$\langle\nu_e|\nu_e(\infty)\rangle = A\cos\theta\exp\left(-i\int_{tr+\varepsilon}^{\infty}\tilde{E}_1\mathrm{dt}\right) + B\sin\theta\exp\left(-i\int_{tr+\varepsilon}^{\infty}\tilde{E}_2\mathrm{dt}\right) \tag{4.87}$$

となるから，ν_e が生き残る確率 $P(\nu_e\to\nu_e)$ は，

$$P(\nu_e\to\nu_e) = |A|^2\cos^2\theta + |B|^2\sin^2\theta \tag{4.88 a}$$

が導ける．干渉項はニュートリノの有限なエネルギー幅，発生地点，測定点の広がりなどで平均すれば寄与しない．$|A|^2$, $|B|^2$ は (4.84) から計算できて

$$P(\nu_e\to\nu_e) = (|\alpha|^2\cos^2\tilde{\theta} + |\beta|^2\sin^2\tilde{\theta})\cos^2\theta + (|\beta|^2\cos^2\tilde{\theta} + |\alpha|^2\sin^2\tilde{\theta})\sin^2\theta$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_{\mathrm{jump}}\right)\cos 2\tilde{\theta}\,\cos 2\theta \tag{4.88 b}$$

を得る．最後の式は，$|\beta|^2 = P_{\mathrm{jump}}$, $|\alpha|^2 = 1 - P_{\mathrm{jump}}$ とおいて得られる．上式は，断熱条件充足の有無に関わらず成立する式である．断熱近似の式は $P_{\mathrm{jump}}=0$ として得られる．

P_{jump} は，共鳴振動を起こす領域で密度が線形的に変化するという条件では解くことができて

$$P_{\mathrm{jump}} = \exp(-\pi\gamma_m/2) = \exp\left(-\frac{\pi\Delta m^2\sin^2 2\theta}{4E\cos 2\theta\dfrac{\mathrm{d}\ln n_e}{\mathrm{d}x}}\right) \tag{4.89}$$

となる[45]．この式は，準位交叉におけるよく知られたランダウ-ゼナー (Landau-Zener) 公式[46] を適用して得られる．

$\tilde{\theta}$ は物質中での混合角の太陽中心（より正確には ν_e が生成されるところ）での値である．太陽中心では十分密度が高く $\tilde{\nu}_2 \simeq \nu_e$ であるので，$\tilde{\theta} \fallingdotseq \pi/2$ とおけば，

$$P(\nu_e\to\nu_e) = \sin^2\theta + P_{\mathrm{jump}}\cos 2\theta \tag{4.90}$$

となる．

典型的なパラメターを設定したときの $P(\nu_e \to \nu_e)$ の数値計算例を図 4.16 に掲げる[47]. (4.88 b) による近似計算はこの数値計算とほとんど同じ答を与える.

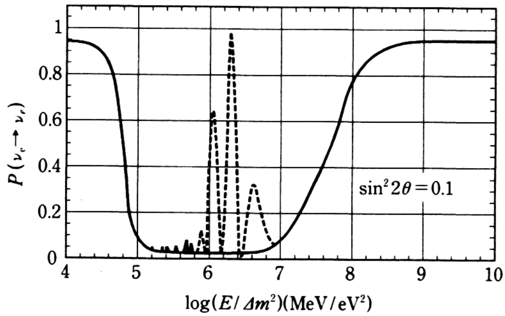


図 4.16 MSW 解での ν_e 生存確率を $x=(E/\Delta m^2)$ の関数として描く (実線). $P(\nu_e \to \nu_e)$ の小さいところの左方は断熱解に, 右方は非断熱解に対応する. ダッシュ線は太陽物質効果に地球物質を加味した計算である[47].

4.5.3 太陽ニュートリノの謎の解はあるか

a. 太陽モデル解

ホームステイクと神岡データは太陽ニュートリノスペクトルの高エネルギー部分 (ホームステイク $\gtrsim$1 MeV, 神岡 $\gtrsim$7.5 MeV) のみを見ている. pp チェインでこのように高いエネルギーのニュートリノを出すのは, ^{8}B のベータ崩壊であり, 全体に対する寄与はわずか 0.02%を占めているにすぎない (図 4.9). しかもこの過程は温度に非常に敏感であり (反応率$\propto T^{18}$), 温度評価のわずかな誤差で大幅にニュートリノ強度が変化するので, ^{8}B からのニュートリノフラックスについては, 必ずしも太陽モデルを全面的に信用するわけにはいかないとする議論が成り立つ. 標準太陽モデルに手を入れて, ニュートリノデータに合わせようとする多くのモデルは, 何らかの要因でこの温度を下げようとする. しかし, ホームステイクデータは, ^{7}B からのニュートリノを含み, こちらの方は, ^{8}B からのニュートリノほど温度に敏感ではないので, 神岡データの方が減少率が少ないという観測データは説明が困難である.

一方, pp チェインによる低エネルギーのニュートリノ ($\langle E_\nu \rangle$=0.26 MeV)

は，陽子が融合して重水素をつくるときに生成される．この反応は全体の大部分を占める上に温度依存性も小さい ($\propto T^{-1.2}$) ので，この場合のニュートリノ生成率は太陽モデルを信用してよいと思われる．最近の解析によると，標準太陽モデルの範囲内で，三つのデータを同時に説明することは不可能であり，またどれか一つを間違っているとして捨てても説明が困難であることが明らかにされた[44]．他方で太陽地震の精密観測データが標準モデルにより非常に良い精度で再現されることから，太陽標準モデルが間違っている可能性は小さいと考えられるようになった[48]．したがって，Ga 検出器による観測でもニュートリノの強度が標準モデルより大幅に小さいという事実は，太陽ニュートリノ問題の答が，ニュートリノ自身の性質にあることを強く示唆しているものと考えることができる．

b．ニュートリノ振動解[44)]

物質振動解がエネルギー依存性をもつことから，太陽ニュートリノのエネルギースペクトル（図 4.10）と比較することによって，物質振動解の三角帯のどの部分が効いているのかが特定できる．断熱解ではエネルギーの大きいところで混合が大きくなるので減少率も大きい．しかし，エネルギーの小さいところでのスペクトルにはほとんど影響を与えない．一方，三角形の下辺，非断熱解を与える境界付近では低エネルギー側の減少が大きい．準真空解では，エネルギースペクトルをほぼ一様に減少させる．

神岡データのエネルギースペクトルの絶対値は標準太陽モデルに合わないものの，形はよく合っている（図 4.13 (b))．このことから，直ちに断熱解の大部分（物質解 1）を否定できる．物質振動の立場で解析をすると，ホームステークデータは $E \gtrsim 0.814$ MeV を積分した値を見ているのに反し，神岡データは，$E \gtrsim 6.5$ MeV に感度があるので，多少両者の観測値が違っても説明はつけられる．

地球効果は，太陽中で $\nu_e \to \nu_\mu$ と振動したものを，$\nu_\mu \to \nu_e$ ともとにもどす作用があり，ニュートリノ強度の時間で積分した値を見ている限り，物質振動解で許される範囲が広がる．しかし，もし地球効果があるならば，日中のデータと夜間のデータで差がでなければならない．神岡測定器では，日中と夜間とのデータを比較したが，差が認められなかったので，$\sin^2 2\theta$-Δm^2 のこの領域

が除外される（図 4.15 (a) 一点鎖線）．こうして，ホームステイクと神岡の両方のデータが正しいとして共通部分を描くと，図 4.15 (a) の斜線部分のようになる．

次に，pp チェインの低エネルギースペクトル部分の測定により，さらに $\sin^2 2\theta$-Δm^2 平面の特定領域に限られる可能性がある．実際の実験データ，例えば Ga の値 (4.60) (4.61) を受け入れれば，図 4.15 (b) で黒影部分のみ許される．太陽ニュートリノ観測のデータがすべて正しいとして，物質振動解を適用すれば，ニュートリノの質量値はほぼ 2 カ所に限定されたということができる．さらにいままでは物質振動解に限って話を進めてきたが，真空振動解が除外されているわけではなく，もう一つの可能性として残っている[40,44]．データは $\sin^2 2\theta \simeq 1$, $\Delta m^2 \sim 10^{-10}$ $(\mathrm{eV})^2$ とすれば再現できる（Just So 解）．

これら三つの解は，エネルギースペクトル，日夜変動，季節変動などでそれぞれ異なった影響を与えるので，スーパーカミオカンデのデータが貯れば選別できると期待されている．

c. 磁気能率による可能性

標準理論を忘れて，ニュートリノがかなり大きな磁気能率をもつとしよう．太陽ニュートリノは太陽磁場（対流圏には磁場が存在する；その厚さを L_{sun} とする）の中で相互作用をし，

$$\mu_\nu \cdot B \cdot L_{\mathrm{sun}} \sim 1 \tag{4.91}$$

であれば，相当数のニュートリノがスピン反転して右巻きニュートリノ ν_R となる．ν_R は物質と相互作用をしないから，ニュートリノが磁気能率をもてば，太陽ニュートリノの謎を解く一つの解となりうる[49]．

$$\mu_\nu = \kappa\mu_{\mathrm{Bohr}} = \kappa(e/2m_e)$$

とおいて，$B \sim 10^4$gauss, $L_{\mathrm{sun}} \sim 2\times10^{10}$cm を入れると，(4.91) が成立する条件は

$$\kappa \sim (0.1-1)\times10^{-10} \tag{4.92}$$

となる．地球上の実験室でのニュートリノ散乱から得られている磁気能率の上限値（(4.41) 参照）

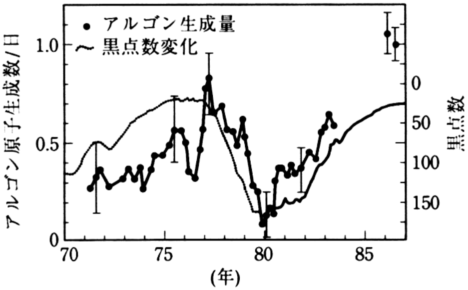
$$|\kappa_{\nu_e}| < 2\times10^{-10} \tag{4.93}$$

とは矛盾しないが，他の天体物理より決めた上限値 (4.43)

$$|\kappa_\nu| < 10^{-12} \tag{4.94}$$

とは折り合いが悪い．

太陽黒点活動が太陽磁場と密接な関係にあることはよく知られている．したがって，太陽ニュートリノの謎がニュートリノの磁気能率起因であるならば，太陽ニュートリノ数と太陽黒点活動は相関があるはずである．実際のところ，ホームステイクデータと，太陽黒点活動とが反相関関係にあるのではないかという指摘[50]が，このモデルの出発点であった（図 4.17 (a) の実線はホームステイクデータ，ダッシュ線は黒点活動を示す）．しかし，神岡のデータ[39]では相関が認められず（図 4.17 (b)），ニュートリノの磁気能率に太陽ニュートリノの謎の原因を求める根拠は薄い．



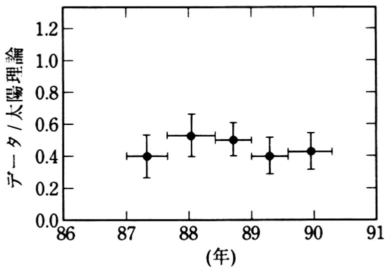


図 4.17　太陽ニュートリノの年変化
(a)　ホームステイクデータ（図 4.11 と同じもの）と太陽黒点活動の相関を示す[50]．
(b)　神岡データ[39]

4.6　大気ニュートリノ

最近，大気ニュートリノの ν_μ 成分が ν_e 成分に比べて少ないというデータ[51]が注目をあびている．大気ニュートリノは1次宇宙線（高エネルギーの陽子）が大気と反応して，π や K を大量生成し，それらが崩壊して ν_μ や ν_e になるものである．地上でのミューオン降下量がわかっているので，それから 1 次宇宙線量を逆算し，ニュートリノ生成量も一応は計算できる[52]．しかし，現時点での計算は必ずしも精度がよいとはいえず，各理論計算間の差は最大30%に

達する．したがって，個々のニュートリノ降下量を絶対的に測定して理論と比較するのは困難であり，実験的にもむずかしい．しかし，$(\nu_\mu+\bar{\nu}_\mu)/(\nu_e+\bar{\nu}_e)$ の比については，大きな誤差は相殺されるのでかなり信頼できるものと思われる．

この場合各理論計算間の違いは10%以下におさまる．エネルギーが $\lesssim 3$ GeV くらいまでならば，主な生産崩壊モードは

$$p+A \longrightarrow \pi^{\pm}(K^{\pm})+X$$

$$\pi^{\pm}(K^{\pm}) \longrightarrow \mu^{\pm}+\overset{(-)}{\nu}_\mu, \qquad \mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm}+\overset{(-)}{\nu}_\mu+\overset{(-)}{\nu}_e$$

であるので，$N(\nu_\mu)/N(\nu_e)\simeq 2$ である．神岡グループは電子ニュートリノについてはほぼ理論の予想通りの値を得たが，ミューニュートリノの観測数は理論予想値より相当低い値を得て，2 重比すなわち

$$R=\frac{(\nu_\mu+\bar{\nu}_\mu)/(\nu_e+\bar{\nu}_e)|_{\rm DATA}}{(\nu_\mu+\bar{\nu}_\mu)/(\nu_e+\bar{\nu}_e)|_{\rm MC}}=0.61+0.03({\rm stat})\pm 0.05({\rm sys}) \tag{4.95}$$

としてデータを発表した[51]．MC はモンテカルロ計算を意味する．これがニュートリノ振動現象によるものではないかという解釈は直ちになされたものの，$R\simeq 1$ とする観測データもあり[53]，理論の信頼性が確定的でなかったことも原因して，しばらく論争が続いていた．これが実際にニュートリノ振動現象による結果であると確定的になったのは，スーパーカミオカンデ測定器により多量のデータが集積されて天頂角分布が明らかになってからである．

地表におけるニュートリノ生成量はどこでも一様と考えられる．ただし，低エネルギー1 次宇宙線は地球磁場に捕まって磁極に集中する傾向があるので，必ずしも一様とは言い切れないが，エネルギーが 500 MeV 以上のニュートリノならば地球磁場の影響は無視してよいか，あるいは補正できる．天頂角が 90 度より大きいニュートリノは地球の裏側で生成され，天頂角分布に依存する距離 L だけ地球を通り抜けて測定器に達する (図 4.18)．ニュートリノにとっては地球物質は透明であるから，上からくるニュートリノと下から来るニュートリノは同じ数だけなければならない．すなわち天頂角分布は上下対称でなければならない．図 4.19 にスーパーカミオカンデによる天頂角分布のデータを示す[54]．電子ニュートリノはどのエネルギー領域でも対称分布を示すが，高エネルギーミューニュートリノは明らかに対称分布から大きくずれている．非対称の原因はニュートリノによる飛来距離の差だけしかないから，

ニュートリノ振動以外の原因を考えるのは困難である．

ニュートリノ振動現象であるとする場合，$\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$, $\nu_\mu \rightarrow \nu_s$ の3

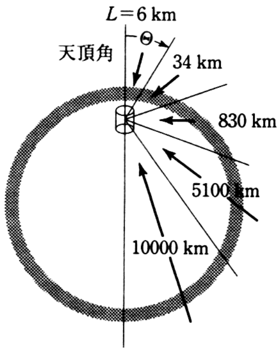


図 4.18　天頂角分布と地球内部通過距離 L との関係

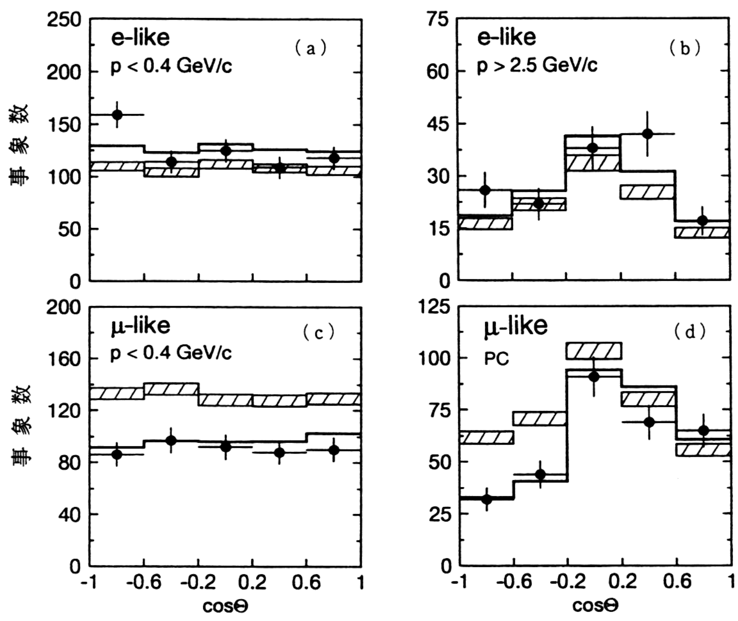
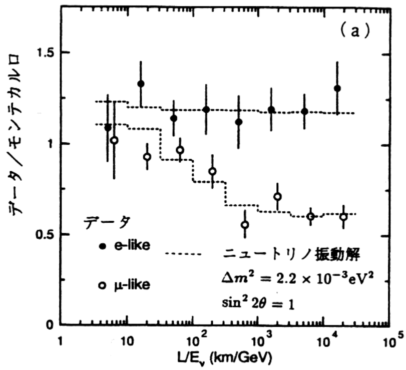


図 4.19　スーパーカミオカンデ測定器による大気ニュートリノの天頂角分布[54)]
(a) (b) が電子反応で，(c) (d) がミューオン反応事象．(d) の PC は partially contained のことで，測定器内で生成されて外へ突き抜けたミューオン事象のこと．$\langle p \rangle$=15 GeV と見積もられている．斜線付四角はニュートリノ振動を入れないときの予想値で，実線がニュートリノ振動解を表す．

種類が考えられる．ν_s の s は sterile（＝不毛の）の略で，右巻きニュートリノもしくは物質とは相互作用をしない新種のニュートリノのことを意味する．ν_e は物質振動をするので地球効果が他とは多少異なる．スーパーカミオカンデグループはニュートリノ振動効果を入れた解析を行い，たぶん，$\nu_\mu \to \nu_\tau$ もしくは $\nu_\mu \to \nu_s$ で，

$$\Delta m^2 \simeq 2.2\times10^{-3}\,\mathrm{eV}^2, \qquad \sin^2 2\theta \simeq 1.0 \tag{4.96}$$

を得た[54]．図 4.20 (a) に，ν_e と ν_μ の数を振動変数 L/E の関数としてプロットした．なお，ν_μ と地球物質による反応で生成されたミューオンは，下からくるミューオンとして観測されるが，これらによる結果もすべて整合性のある結果を与える[55]．$\nu_\mu \to \nu_e$ は，原子炉による独立な実験で完全に否定された[56]（図 4.8 (a)）．図 4.20 (b) にはデータから許容されるニュートリノ振動のパラメター領域を示した．パラメター領域が確定されたので，より実験条件をコントロールできる加速器実験による追認が可能となる．現在，筑波の高エネルギー物理学加速器研究機構（KEK）の 12 GeV 陽子シンクロトロンでニュートリノビームをつくり，KEK と 270 km 離れた神岡の 2 カ所で測定する K2K 計画[33]と，フェルミ研究所の主ビームでニュートリノをつくり 700 km 離れたミネソタのスーダン（Soudan）で測定するミノス（MINOS）計画が進行している．K2K 計画については，～2000 年頃には結果がでるものと期待されている．



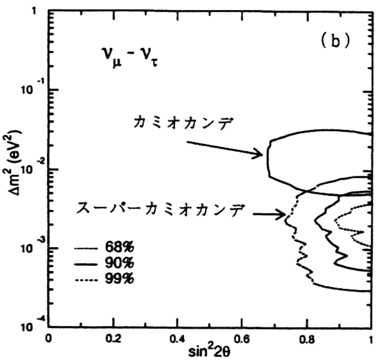


図 4.20 ニュートリノ振動解析結果[54]
(a) データを L/E の関数としてプロット，(b) $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ 平面の許容領域．スーパーカミオカンデの最適解は $\sin^2 2\theta = 1$, $\Delta m^2 = 2.2\times10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$ にある．

$\nu_\mu \to \nu_\tau$ と $\nu_\mu \to \nu_s$ は，中性カレント反応を調べれば区別できる．ν_τ は中性カレント反応，例えば

$$\nu_\tau + N \longrightarrow \nu_\tau + \pi^0 + X$$

を起こすが ν_s は起こさないから，π^0 生成量を調べればよい．現時点では神岡グループは違いを見分けるだけの統計量をもっていないが，いずれ明らかになるであろう．

大気ニュートリノによるニュートリノ振動効果存在の証明は，標準理論の枠内では扱えない実験データを初めて与えたということで意義が大きい．$m_3 \gg m_2, m_1$ と仮定すれば $\Delta m^2 \simeq m_3^2$ であるから，

$$m_3 \simeq 0.05\ \mathrm{eV} \tag{4.97}$$

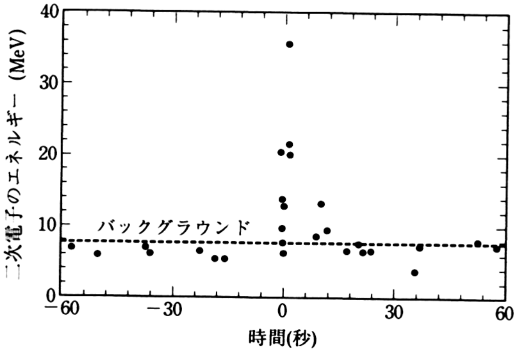
を意味する．シーソーメカニズムを仮定すれば右巻きのニュートリノ質量 m_R もしくは新しいエネルギースケールが，$m_\tau^2/m_R \simeq 0.05\ \mathrm{eV} \to \sim 10^{12}\ \mathrm{GeV}$ ということになる．一方，最近の宇宙論の展開では，宇宙の物質密度が臨界密度に等しく，冷たい暗黒物質が 80%，熱い暗黒物質が 20% というシナリオが提案されており（文献 57 および第 8 章「宇宙論」を参照），$\sim 5\ \mathrm{eV}$ の質量をもつニュートリノが熱い暗黒物質としてぴたり適合するという考え方もある．これを重視すれば，ニュートリノが縮退しており，

$$m_3 \sim m_2 \sim 5\ \mathrm{eV}, \qquad |m_3^2 - m_2^2| \sim 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{eV}^2 \tag{4.98}$$

というシナリオが描ける．いずれにしろ，この振動結果の意味づけについては現在活発な研究が進行中である．

4.7 超新星ニュートリノ

1987 年 2 月 23 日，大マゼラン星雲に出現した超新星 SN1987A は，ケプラー以来 400 年ぶりの肉眼観測と，同期してニュートリノが観測された（図 4.21）[58] という意味で画期的な現象であり，太陽ニュートリノ観測と合わせ，ニュートリノ天文学の黎明を告げるものであった．SN1987A からのニュートリノ観測は，恒星の進化モデルが基本的に正しかったことを裏づけたという意味で，天体物理学上での一つのエポックを画するものであるが，同時に素粒子物理学の面においても，地上では設定不可能なテストベンチを与えてくれると



日本標準　1987年 2月23日 16時35分35秒(±1分)
グリニッジ標準時　2月23日　7時35分35秒(±1分)

図 4.21　神岡測定器による超新星 SN1987A の観測データ[58)]
横軸が時間 (秒), 縦軸がエネルギーを示す. 中央0のところから始まる11例がニュートリノ. 前後のエネルギーの低い現象は背景雑音.

いう意味で重要である. このためには超新星からニュートリノが放出されるからくりを理解しておく必要がある[59)].

4.7.1 超新星の形成過程

a. 星の進化

超新星は太陽よりは数倍 (8倍以上) 重い恒星の進化の終焉現象と見なされている.

i) 原始星　星の起源は, 銀河宇宙に漂う星間物質が, 重力により収縮して芯を形成するところからはじまる. この芯はさらに周りの物質を吸収して太っていくが (原始星), 吸収された物質は落下の際得た運動エネルギーにより熱運動をし, その結果この成長しつつある原始星の内部には圧力が生じる. この圧力が重力と釣り合って準安定状態となるので, 原始星はつぶれずに有限の大きさを保持する. 付加した粒子の運動エネルギーの半分は放射エネルギーとして放出されるので, 失ったエネルギーを補充するためには, 原始星は収縮して重力エネルギーを放出する必要があるが, そのために中心付近の圧力と温度が間断なく上昇し, 表面温度もまた上昇する. 表面温度が2000度を超えれば, 放射スペクトルは可視光領域に入り, 輝き始める. これが星の誕生である.

ii） 主系列星　中心温度が 10^7 度を超えた段階で，水素に火がつき熱核融合反応が始まる．核融合が始まると，表面からの損失エネルギーは核融合によって補われるので，水素燃料の続く限り重力収縮は起こらず安定な状態を維持する．これが主系列星と呼ばれる星の状態であり，太陽もこの仲間である．太陽では中心温度が 1.5×10^7 度くらいであり，融合反応は pp チェインが主過程であるが，これより温度の高い星では CNO サイクルが優勢となる．重い星では圧力が高く温度も高いので燃焼率が大きく，放出エネルギーが大きくて早く燃えつきる．このような星では表面温度も高く青白い星となる．水素燃焼反応は弱い相互作用を経由するのでこれが燃焼率，したがって寿命を決める．太陽の場合は 100 億年程度の寿命をもつので後 50 億年くらいの余命をもつが，太陽の 10 倍重い星は 10^7 年くらいで寿命がつきると計算されている．

iii） ヘリウム燃焼過程　水素が燃えつきると，再び重力収縮が始まるが，この結果またもや中心付近の温度と圧力が上昇し，今度は水素の燃えかすであったヘリウムに火がつく．ヘリウムに火がつくと圧力が非常に高くなり，星全体が膨張すると同時に周縁部の温度が下がって赤色巨星となる．太陽程度の質量をもつ星は，この段階で周縁部を吹き飛ばして，中心部は白色矮星として残る．吹き飛ばされて膨張中の周縁部と中心の星は惑星型星雲として観測される．

iv） 炭素燃焼過程　太陽より重い星は，ヘリウムが燃えつきると次の段階に進み，炭素や酸素が，さらにはケイ素，マグネシウム，硫黄などいろいろなものが形成されては燃え，最終的には鉄にいきつく．鉄は元素の中で最も安定なので，鉄が燃えることはなく鉄の芯がだんだんと発達していき，これ以上核融合によってはエネルギーがつくられない死の段階に近づく．超新星として爆発する直前の恒星は，上に述べた元素の殻が重い順に次々と層をつくる玉ねぎ構造をしている．水素から鉄がつくられるまでに開放されるエネルギーは，水素 1 個当たり 8.6 MeV である．このうち水素燃焼だけで，6.9 MeV 放出してしまうので，水素燃焼終了後の余命は短い．水素燃焼継続時間は，$\sim10^{10}$ 年であるが，ヘリウム燃焼時間は 10^7 年程度である．

中心温度が 10^8 K より高いとフォトン放出よりニュートリノ放出によるエネルギーもち出しが大きくなる．炭素燃焼で大体この段階に達するが，いったん

ニュートリノ冷却が始まると燃焼率は加速度的に速くなる．酸素の燃焼時間のスケールは 10^5 年程度であるが，ケイ素の燃焼時間は数秒程度で終わる．それ以後の燃焼過程はより急速である．

v）　星の死　　鉄の芯が十分発達すると，鉄はエネルギーを供給しないので，重力による収縮が起こり，温度と密度がさらに上昇していく．ついには鉄の光分解が始まり，ヘリウムに壊れ，さらには陽子と中性子に分解する．安定な鉄が壊れるのでこれはエネルギーを吸収する吸熱反応であり，重力収縮にますます弾みがつき，ついには爆縮となる．何億年もかけて築いた鉄を一瞬にして壊すのである．

b.　II 型超新星

星の終末には縮退圧が大きな役割を演じる．密度がある程度以上大きくなると，同一粒子は同じ運動状態をもつことができないというパウリの排他原理により，ある距離以上に他の粒子が近づくのを妨げるようになる．このような状態を縮退しているという．縮退圧は量子力学的効果によるもので，温度にはほとんどよらず，エネルギーが供給されなくももちこたえる圧力である．いったん縮退すれば圧力は温度にはよらないが，どのへんの密度で縮退が起こるかは温度による．白色矮星は炭素燃焼が起こる前に電子が縮退を起こして重力による収縮がそこで止まってしまった状態である．陥没が起きたとき，縮退圧でもちこたえられる圧力には限度があり，残された芯が太陽質量の 1.4 倍（チャンドラセカールの限界）を超えていると，電子縮退ではもちこたえられず，電子は陽子に押しつけられて中性子になり，中性子の縮退圧が作用してはじめて陥没が止まる．このとき衝撃波が発生する．もし陥没を起こす中心部の質量が十分大きいと中性子の縮退圧をもってしてもやめることはできずブラックホールとなる．陥没の結果残された周辺部の殻は，支えを外されて中心に向かって落下するが，先の衝撃波に跳ね返されて爆発が起こる．衝撃波のみでは不足で，大量発生したニュートリノによる内圧上昇効果が重要と考える人もいる．これがII型の超新星と呼ばれるものであり，質量が太陽の 8 倍以上重い星はこうして終焉を迎え，後にはパルサーと呼ばれる中性子星かまたはブラックホールが残る．

c.　I 型超新星

I 型の超新星とは，炭素燃焼が暴走したときに発生する．爆発の時間経過や放射エネルギースペクトルがII型と異なる．通常は，核燃焼によってエネルギーが発生すると，圧力が上昇し，膨張が起きて温度が下がるので，燃焼率が下がるという自然な抑制効果が働き，燃焼率の均衡がとれる．ところが，炭素燃焼が始まったときにすでに縮退が起きていると，縮退圧はエネルギーの供給がなくとも持続する圧力であるので，エネルギーが発生しても圧力が下がらず，温度のみが上昇し，燃焼率が増大して暴走が起きるのである．この場合星は粉々に砕け後には何も残らない．このような状況は，ある程度発達した星に伴星があって，伴星から物質が付加されるときに起こるとされている．

4.7.2　超新星ニュートリノ検出

a.　検　出　法

ニュートリノの大量発生はまず，衝撃波が生じた時点で，陽子の中性子化反応 (neutronization ; $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$) により引き起こされる (約 10 msec 持続)．このニュートリノは直ちに外に放出される．芯の密度はこの間増大し続けニュートリノに対してすら不透明になる．したがって，芯の中で発生したニュートリノは，多重散乱によって熱ニュートリノになり，表面からのみ (ニュートリノに対して透明になる密度のところ，この領域内をニュートリノ光球 : neutrinosphere という) 脱出可能となる．最初ニュートリノ光球が形成されるときは～1000 km くらいの半径をもつが，

$$\gamma + \gamma \longrightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \quad \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \quad \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$$

$$e^+ + e^- \longrightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \quad \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \quad \nu_\tau \bar{\nu}_\tau \tag{4.99}$$

などの熱過程によってエネルギーをもち去られ，最終的に中性子星となって残るときは半径が～10 km くらいとなっている．図 4.22 (a) に陥没と跳ね返りの様子を，図 4.22 (b) にその結果放出されるニュートリノの強度を描く[60]．これは質量を太陽の 25 倍としたときのシミュレーションで，$L_{\nu_e}, L_{\bar{\nu}_e}, L_{\nu_\mu}$ はそれぞれ，ν_e, $\bar{\nu}_e$, その他 (ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$) の強度である．最初の鋭い山は中性子化による ν_e の放出を示す．ニュートリノの平均エネルギーは，

$$\langle E(\nu_e) \rangle \sim 10 \text{ MeV}, \qquad \langle E(\bar{\nu}_e) \rangle \sim 15 \text{ MeV}$$

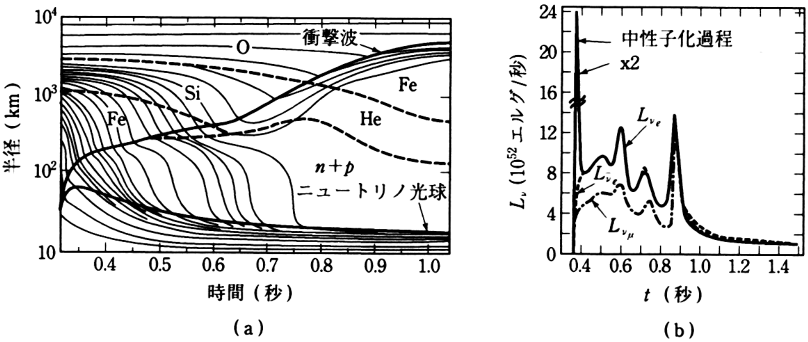


図 4.22 超新星爆発のシミュレーション[60)]

(a) 超新星内部各層の時間変化. ケイ素 (Si) およびそれより外にある殻が, 外向きにバウンスされる様子を示している.

(b) 超新星爆発の際放出されるニュートリノのエネルギー強度の時間変化. $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$ の L は $L\nu_\mu$ に同じ. 星の質量は $25M_\odot$

$$\langle E(\nu_\mu)\rangle=\langle E(\bar{\nu}_\mu)\rangle=\langle E(\nu_\tau)\rangle=\langle E(\bar{\nu}_\tau)\rangle\sim 20\ \mathrm{MeV} \tag{4.100}$$

である.

地上でのニュートリノ観測は次の反応による[61)].

$$\sigma(\bar{\nu}_e p\to e^+ n)=9.77\times10^{-42}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})^2\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\bar{\nu}_e e\to \bar{\nu}_e e)=0.388\times10^{-43}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\nu_e n\to e^- p)=2.2\times10^{-42}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})^2\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\nu_e e\to \nu_e e)=0.933\times10^{-43}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\nu_\mu e\to \nu_\mu e)=0.159\times10^{-43}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e\to \bar{\nu}_\mu e)=0.130\times10^{-43}(E_\nu/10\ \mathrm{MeV})\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma(\nu_\tau e\to \nu_\tau e)=\sigma(\nu_\mu e\to \nu_\mu e)$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\tau e\to \bar{\nu}_\tau e)=\sigma(\bar{\nu}_\mu e\to \bar{\nu}_\mu e)$$

$$\sigma(\nu_e{}^{16}O\to e^{16}F)=1.1\times10^{-44}(E_\nu-13\ \mathrm{MeV})^2\mathrm{cm}^2 \tag{4.101}$$

ニュートリノ検出に水を使う場合, 自由中性子がないので, 重要な反応は $\bar{\nu}_e p \to e^+ n$ である. $\bar{\nu}_e p$ 反応では, 電子が等方的に放出されるので, 入射の

ニュートリノの飛来方向の情報は失われる．$\nu_e e$ 反応は，数は少ないが（$N(\bar{\nu}_e p)/N(\nu_e e) \fallingdotseq 20/1$），$\nu$ の飛来方向を特定できるので重要である．ニュートリノ検出測定器は大きいにもかかわらず（神岡で 2140 t，IMB で 6800 t），観測されたニュートリノ事象数は，神岡で 11 例，IMB で 8 例と少なく，ほとんどが $\bar{\nu}_e p$ 反応と思われる．

b．ニュートリノルミノシティ

ニュートリノの地球上でのエネルギースペクトルは，フェルミ-ディラック統計に従うとして，測定器の効率，SN 1987 A までの距離（50 kpc）などを入れると，超新星爆発時のニュートリノ温度 T_ν，$\bar{\nu}_e$ の全エネルギー $L(\bar{\nu}_e)$ は[62]，

$$T_\nu = 3.7 \pm 0.4\ \text{MeV}, \qquad L(\bar{\nu}_e) = 4.8 \pm 2 \times 10^{52}\ \text{erg} \tag{4.102}$$

と計算できる．他のニュートリノの寄与を考慮して，6 倍すれば SN 1987 A の全放出エネルギー E は

$$E = 3 \pm 1 \times 10^{53}\ \text{erg} \tag{4.103}$$

と計算される．一方，超新星爆発の際放出されるエネルギー E は次のようにして推定できる．星の質量 M や半径 R に爆発前は star，爆発後残された中性子星には ns と指標をつけると

$$E = \left(-\frac{3GM_{\text{star}}^2}{5R_{\text{star}}}\right) - \left(-\frac{3GM_{\text{ns}}^2}{5R_{\text{ns}}}\right) \tag{4.104}$$

と表される．G は万有引力定数である．$R_{\text{star}} \sim 10^{10}$ cm，$R_{\text{ns}} \sim 10^6$ cm であるので，$M_{\text{star}} \gg M_{\text{ns}}$ にもかかわらず第 2 項が優勢となり，

$$E \fallingdotseq 2.5 \pm 1.5 \times 10^{53} \text{erg} \left(\frac{R_{\text{ns}}}{10\ \text{km}}\right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{ns}}}{1.4 M_\odot}\right)^2 \tag{4.105}$$

となる[63]．$M_\odot$（$= 1.989 \times 10^{30}$ kg）は太陽質量である．観測値との一致は非常によい．既知の粒子に関する相互作用のみで超新星のエネルギーをうまく説明できるので，新粒子新相互作用の入る余地は少ない．この事実を使えば，仮説に基づく新粒子の性質に関し大きな制限がつけられるのである．§4.1.2 で述べたマヨロンに対する制限はこの議論から得られたものである．

4.7.3　素粒子物理への見返り

以下に SN 1987 A 観測により得られた情報のうち，素粒子物理に関するものをいくつか抜き出してみよう[34,64]．

a.　ニュートリノ質量[65]

ニュートリノが質量をもつと，速度 v_ν は光速より小さくなり

$$v_\nu \fallingdotseq 1-\frac{m_\nu{}^2}{2E_\nu{}^2} \tag{4.106}$$

となるので，超新星までの距離を L とすると，$m_\nu=0$ の場合に比べて余分にかかる時間は

$$\Delta t_i=2.57\,\mathrm{sec}\times\left(\frac{L}{50\,\mathrm{kpc}}\right)\left(\frac{10\,\mathrm{MeV}}{E_\nu}\right)^2\left(\frac{m_\nu}{10\,\mathrm{eV}}\right)^2 \tag{4.107 a}$$

で与えられる．E_1 と E_2 のエネルギーをもつニュートリノの到着時間差は

$$\Delta t_m=2.57\,\mathrm{sec}\times\left(\frac{1}{50\,\mathrm{kpc}}\right)\left(\frac{m_\nu}{10\,\mathrm{eV}}\right)^2\left[\left(\frac{10\,\mathrm{MeV}}{E_1}\right)^2-\left(\frac{10\,\mathrm{MeV}}{E_2}\right)^2\right] \tag{4.107 b}$$

により与えられる．したがって，観測された事象について上記の時間差を見れば，ニュートリノ質量の見当がつく．到着時間は，幅$\lesssim$10 sec 以内におさまっているので，$m\lesssim 20$ eV と抑えられる．これは実験室での上限値～10 eV と同程度である．

b.　ニュートリノの寿命

超新星からのニュートリノを観測したという事実は，それが途中で崩壊しなかったことを意味する．したがって，相対論的効果による時間の遅れを考慮して

$$(E_\nu/m_\nu)\tau_\nu \gtrsim 5\times10^{12}\,\mathrm{sec} \tag{4.108 a}$$

すなわち，

$$\tau_\nu(E_\nu/10\,\mathrm{MeV}) \geqq (m_\nu/1\,\mathrm{eV})\times5\times10^5\,\mathrm{sec} \tag{4.108 b}$$

となる．これによって，太陽ニュートリノの謎を ν_e の崩壊に帰するモデルは大方除外される．

c.　ニュートリノの電荷[66]

ニュートリノが電荷 $Q_\nu e$ をもつとすれば，銀河磁場（B～10^{-6} ガウス）により曲げられるので，電荷をもたない場合の直線路 L_B（磁場のあるところのみの長さ）に比べ，地球までの到達時間が

$$\Delta t_Q = \frac{L_B{}^3 Q_\nu{}^2 e^2 B^2}{24 m_\nu{}^2}\left(1+\frac{m_\nu{}^2}{E_\nu{}^2}\right) \tag{4.109}$$

だけ余分にかかるので，2個のニュートリノの到着時間差は，(4.107 b) に比べさらに，Δt_Q だけ大きくなり，

$$\Delta t = \Delta t_m + \frac{L_B{}^3 Q_\nu{}^2 e^2 B^2}{24}\left(\frac{1}{E_1{}^2}-\frac{1}{E_2{}^2}\right) \tag{4.110}$$

となる．Q_ν の上限値は，ニュートリノ質量の上限値を使って書き直せるので，結果は，

$$Q_\nu < 3\times 10^{-17}\left(\frac{10^{-6}\text{gauss}}{B}\right)\left(\frac{1\,\text{kpc}}{L_B}\right) \tag{4.111}$$

を与える．

d．ニュートリノの磁気能率[25,67)]

ニュートリノが磁気能率 $\kappa\mu_{\text{Bohr}}$ をもてば，磁気相互作用により超新星のニュートリノ光球の中で ν_R が生産される．これはエネルギー100～200 MeV をもち，かなりエネルギーの高いニュートリノである．いったん ν_R に変換されると，ν_R は物質と磁気相互作用か，右巻きゲージボソンとの結合による右巻き相互作用しかしないので，断面積は小さくそのままニュートリノ光球外へエネルギーをもち出してしまうので，ν_L の輝度が小さくなる．観測と矛盾しないという条件で，κ に対する制限がつく．

もう一つの議論は次のようなものである．ν_R はニュートリノ光球内で多重散乱を受けないので，生産されたときのエネルギーを保持したまま地球に到達する．磁気能率をもっていれば銀河磁場との相互作用で ν_L にもどることができるので，エネルギーの高いニュートリノが観測されるはずである．そのような高エネルギーのニュートリノは観測されなかったという事実が κ に制限をつけて

$$\kappa \lesssim 10^{-12} \tag{4.112}$$

となる．これらの制限が真実ならば，ニュートリノの磁気能率による太陽ニュートリノの謎の解決法は破綻する．しかし，これらの制限については，超新星内のニュートリノ生成機構理解がかなり不定性のあることを考慮すると，早急な結論は避けるべきであろう．

4.8 おわりに

超新星からのニュートリノ反応をわずか十数事象観測しただけで，これだけの結論が引き出せたのである．もう少し定量的な議論ができるだけの事象数があれば，どれほど役に立つかは論を待たないであろう．そのような意味でスーパーカミオカンデによる新たな超新星観測が望まれる．また太陽ニュートリノ問題に決着をつけることも必要である．Ga を使う装置の本格的なデータの集積はこれからである．カナダの Sudbury に建設中の測定器[68]は 1000 t の重水を使用するもので，太陽ニュートリノ (ν_e) を

$$\nu_e + d \longrightarrow p + p + e^- \tag{4.113}$$

により観測する．また，次の中性カレント反応を検出することにより，

$$\nu + d \longrightarrow \nu + p + n \tag{4.114}$$

ν_e と ν_μ と ν_τ を合わせたものの飛来率が測定できる．この反応は ν 振動が起きて他の ν に変わったとしても，併せて観測できるという利点をもつ．

スーパーカミオカンデとこれらの装置を合わせて低エネルギー太陽ニュートリノデータが得られれば，謎の原因が太陽モデルにあるのか，ニュートリノ振動にあるのか決着をつけてくれるであろう．

参考文献

1) ニュートリノの種々の可能性を包括的に議論した解説としては，
M. Fukugita and T. Yanagida : "Physics of Neutrinos" in Physics and Astrophysics of Neutrinos, ed. M. Fukugita and A. Suzuki, Spring-Verlag, Tokyo, 1994, p. 1 をあげておく．

2) Particle Data Group : *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 1173 ; **D54** (1996) ; *European Phys. J.*, **C3** (1998) 1

3) D.A. Dicus *et al.* : *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 1819

4) B.W. Lee and S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977) 165
E.W. Kolb and M.S. Turner : The Early Universe, Addison Wesley, 1990

5) G.B. Gelmini and M. Roncadelli : *Phys. Lett.*, **B99** (1981) 411
H. Georgi *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B193** (1983) 297
M.C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir : *Phys. Lett.*, **232** (1989) 383

P. Langacker and H.A. Weldon : *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1377
6) D.A. Dicus *et al.* : *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 1829
M. Fukugita *et al.* : *Phys. Rev.*, **D26** (1983) 1840
K. Choi and C.W. Kim : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 3225
7) T. Yanagida : Proc. of Workshop Unified theory and Baryonn Number in the Universe (KEK, Tsukuba, Japan), 1970 ; *Prog. Theor. Phys.*, **B135** (1978) 66
M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky in Superravity (North Holland), 1979, p. 315
8) C. Pati and A. Salam : *Phys. Rev.*, **D10** (1974) 275
R.N. Mohapatra and J.C. Pati : *Phys. Rev.*, **D11** (1975) 2588
G. Senjanovic and R.N. Mohapatra : *Phys. Rev.*, **D12** (1975) 1502
9) L. Durkin and P. Langacker : *Phys. Lett.*, **B166** (1986) 436
V. Barger *et al.* : *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 152
10) A. Jodido *et al.* : *Phys. Rev.*, **D34** (1986) 1967
G. Barenboim *et al.* : *Phys. Rev.*, **D55** (1997) 4213
11) G. Beall *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 848
W.S. Hon and A. Soni : *Phys. Rev.*, **D32** (1985) 163
J. Baseq *et al.* : *Phys. Rev.*, **D32** (1985) 175
P. Colaugelo and G. Nardulli : *Phys. Lett.*, **B253** (1991) 154
12) I.I. Bigi and J.M. Frere : *Phys. Lett.*, **B129** (1983) 469
G. Ecker and W. Grimus : *Nucl. Phys.*, **B258** (1985) 328
13) M. Doi, T. Kotani and E. Takasugi : *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **83** (1985) 1
P. Langacker : Neutrino Mass, in "Testing the Standard Model", Proc. Theor. Ad. Study Inst., 1990, p. 863
14) H. Ejiri : "Double Beta Decay" in Physics and Astrophysics of Neutrinos, ed. M. Fukugita and A. Suzuki, Springer-Verlag, Tokyo, 1994, p. 500
15) M. Alston-Garnjost *et al.* : *Phys. Rev.*, **C55** (1997) 474
M. Günther *et al.* : *Phys. Rev.*, **D55** (1997) 54
16) L. Baudis *et al.* : *Phys. Lett.*, **B407** (1997) 219
17) PDG : *European Phys. J.*, **C3** (1998) 1
18) M.A. Beg, W.J. Marciano and M. Ruderman : *Phys. Rev.*, **D17** (1978) 1395
G. Degrassi, A. Sirlin and W.J. Marciano : *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 287
19) B.W. Lee and R.E. Shrock : *Phys. Rev.*, **D16** (1977) 1444
K. Fujikawa and R.E. Shrock : *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980) 963
20) H.A. Bethe : *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **31** (1935) 108
P. Vogel and J. Engel : *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 3378
21) Derbin *et al.* : *PAN*, **57** (1994) 222
L.A. Ahrens *et al.* : *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 3297
22) Cooper *et al.* : *Phys. Lett.*, **B280** (1992) 153
23) M. Fukugita and S. Yazaki : *Phys. Rev.*, **D36** (1987) 3817
M. Fukugita *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 879
G.G. Raffelt and S.P. Dearborn : *Astrophys. J.*, **336** (1989) 61

24) G. Raffelt : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 2856
25) Goyal *et al.* : *Phys. Lett.*, **B346** (1995) 312
26) R.E. Shrock : *Phys. Lett.*, **B96** (1980) 159 ; *Phys. Rev.*, **D24** (1981) 1232
27) BNLE734 ; L. Ahrens, *et al.* : *Phys. Lett.*, **B194** (1987) 586
28) B. Pontecorvo : *Sov. Phys.*, **JETP6** (1958) 429 ; *ibid.*, **7** (1958) 172
Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata : *Prog. Theor. Phys.*, **28** (1962) 870
29) R. Eichler *et al.* : Proc. 1987 Int. Conf. on High Energy Phys., Humburg, Nucl. Phys B (Proc. Suppl.) 3, (1988) 389
30) J.J. Simpson and A. Hime : *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 1825, 1837
B. Sure *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 2444
A. Hime and N.A. Jelly : *Phys. Lett.*, **B257** (1991) 441
31) H. Kawakami *et al.* : *Phys. Lett.*, **B287** (1992) 45
32) 29) および
BNLE734 ; L. Ahrens *et al.* : *Phys. Rev.*, **D31** (1985) 2732
BNLE776 ; L. Borodovsky, *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 274
33) K. Nishikawa : "A Possible Long Baseline Neutrino Oscillation Experiment Using KEK PS and Super Kamiokande", INS Rep.-924, April 1992
D.S. Ayres : *Nucl. Phys.*, **B** (Proc. Suppl.) **59** (1997) 297
Proc. 4th KEK Topical Conf. on Flavor Physics, KEK, Tsukuba, Oct. 29-31, 1996, ed. Y. Kuno and M.M. Nojiri
34) J.N. Bahcall : Neutrino Astrophysics, Cambridge Univ. Press, 1989
35) J.N. Bahcall and R.K. Ulrich : *Rev. Mod. Phys.*, **60** (1988) 297
J. Bahcall and M.H. Pinsonneault : *Rev. Mod. Phys.*, **67** (1995) 781
J. Bahcall, S. Basu and M. Pinsonneault : astro-ph/9805135
36) R. Davis, D. Harmer and K. Hoffman : *Phys. Rev. Lett.*, **20** (1968) 1205
R. Davis, A. Mann and L. Wolfenstein : *Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci.*, **39** (1989) 467
37) B.T. Cleveland *et al.* : *Nucl. Phys* (*Proc. Suppl.*), **38** (1995) 47
B.T. Cleveland *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B38** (1995) 47
38) S. Turk-Chieze and I. Lopes : *J. Astrophys.*, **408** (1993) 347
S. Turk-Chieze, S. Cahen, M. Casse and C. Doom : *J. Astrophys.*, **335** (1988) 415
39) KAMIOKANDE ; K.S. Hirata, *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 16 ; *ibid.*, **65** (1990) 1297, 1301 ; *ibid.*, **66** (1990) 97 ; *Phys. Rev.*, **D44** (1991) 2241 ; **D45** (1992) 21705
S. KAMIOKANDE ; Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 1683 ; *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1158
40) Y. Suzuki : Proc. XVIII th Int. Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics, Takayama, Japan, June 1998
41) SAGE ; J.N. Abdurashitov *et al.* : *Phys. Lett.*, **B328** (1994) 234 ; *Nucl. Phys.*, **B38** (1995) 60
42) GALLEX ; P. Anselmann *et al.* : *Phys. Lett.*, **B327** (1994) 377 ; **B357** (1995) 237
W. Hampel *et al.* : *Phys. Lett.*, **B388** (1996) 384
43) S.P. Mikheyev and Y. Yu Smirnov : *Sov. J. Nucl. Phys.*, **42** (1988) 297

H. Bethe : *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 1305
H. Bethe and J.N. Bahcall : *Phys. Rev. Lett.*, **44** (1991) 2962
L. Wolfenstein : *Phys. Rev.*, **D17** (1978) 2369 ; *ibid.*, **D20** (1979) 2634
44) N. Hata and P. Langacher : *Phys. Rev.*, **D56** (1997) 6107
45) W.V. Haxton : *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1986)
S.J. Parke : *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986) 1275
46) L. Landau : *Phys. Zeits. d. Sowetunion*, **2** (1932) 46
C. Zener : *Proc. Roy. Soc.*, London, **A137** (1932) 696
47) Y. Takeuchi : Measurement of Solar Neutrinos from One Thousand Days of Data at Kamiokande-III, PhD. Thesis submitted to Tokyo Institute of Technology, Jan., 1995
48) J.N. Bahcall *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 171
49) A. Cisneros : *Astrophys. Space Sc.*, **10** (1971) 87
M. Voloshin *et al.* : JETP64 (1988) 446 ; *Sov. J. Nucl. Phys.*, **44** (1986) 440
C.S. Lim and W. J. Marciano : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 1368
E. Kh. Akhmedov : *Phys. Lett.*, **B213** (1988) 64
50) R. Davis *et al.* : *Prog. Nucl. Part. Phys.*, **32** (1994) 13
51) KAMIOKANDE ; K.S. Hirata, *et al.* : *Phys. Lett.*, **B205** (1988) 416. *ibid* ; **B280** (1992) 146
Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Lett.* **B433** (1998) 9
IMB ; *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 2561
SOUDAN2 ; W.W.M. Allison *et al* : *Phys. Lett.*, **B391** (1997) 491
52) G. Barr, T.K. Gaisser and T. Stanev : *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 3532
E.V. Bugaev and V.A. Naumov : *Phys. Lett.*, **B232** (1989) 391
M. Honda, K. Kasahara, K. Hidaka and S. Midorikawa : *Phys. Lett.*, **B248** (1990) 193
H. Lee and Y.S. Koh : *Nuovo Cimento*, **B105** (1990) 883
53) NUSEX ; M. Aglietta *et al.* : *Europhys. Lett.*, 8 (1989) 611
FREJUS : K. Daum *et al.* : *Z. Phys.*, **C66** (1995) 417
54) Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Lett.*, **B436** (1998) 33 ; *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1562
55) Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 2016
56) CHOOZ ; M. Apollonio *et al.* : *Phys. Lett.*, **B420** (1998) 397
57) E. Gawiser and J. Silk : *Science*, **280** (1998) 1405
58) KAMIOKANDE ; K. Hirata *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987) 1490 ; *Phys. Rev*, **D38** (1988) 448
IMB ; R.M. Bionta *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987) 1494
C.B. Bratton *et al.* : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 3361
59) 鈴木英之：物理, **43** (1992) 106
H. Suzuki : Supernova Neutrinos in "Physics and Astrophysics", ed. M. Fukugita and A. Suzuki, Springer-Verlag, p. 763, 1994
60) S.A. Colegate : *Nature*, **341** (1989) 489
S.E. Woosley, J.R. Wilson and R. Mayle : *Astrophys. J.*, **302** (1986) 19

T. Mayle, J.R. Wilson and D.N. Schramm : *Astrophys. J.*, **318** (1987) 288
61) J. Arafune and M. Fukugita : *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 367
62) J.M. Lattimer and A. Yahil : *Astrophys. J.*, **340** (1989) 426
63) J. Cooperstein : *Phys. Rev.*, **C37** (1988) 786
64) R.N. Mohapatra and P.B. Pal : Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics, World Scientific, Singapore, 1991
65) K. Sato and H. Suzuki : *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987) 2722
A. Burrows and J.M. Lattimer : *Ap. J. Lett.*, **318** (1987) L63
J. Arafune *et al.* : *Phys. Lett.*, **B194** (1987) 477
66) G. Barbiellini and G. Cocconi : *Nature*, **329** (1987) 21
67) I. Goldman *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 1789
J. Lattimer and J. Cooperstein : *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 24
R. Barbieri and R. N. Mohapatra : *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 27
68) SNOW ; E.W. Beier and D. Sinclair : Scientific and Technical Description of Mark II SNOW Detector, SNO-89-15 (1989)

5
大統一と超対称性

第4章では，ニュートリノ質量という昔からなじんでいる問題を取り扱うには，標準理論を多少は拡張する必要性があることを議論した．ここでは，さらに標準理論の欠点を積極的に掘り下げ，その解決法を探ることによって新しい方向を模索するよすがとしよう．標準理論は，現象論としてはほとんど難攻不落のように見えるが，理論的にはいくつかの不満があり，新しい拡張モデルがたくさん提案されている．したがって，これからの議論は必然的に思索的にならざるをえない．しかし，アイデアだけでデータの裏づけのないモデルを詳細に議論することはあまり意味がないから，以下は将来の方向を大きく左右しそうなものについて，また実験検証の可能性のあるものについて，大づかみの議論をすることにする．まず，標準理論の最も自然な拡張である大統一理論 (grand unified theory : GUT＝QCD と GWS 理論の統合) を導入し，大統一の困難である階層問題から超対称性 (super symmetry) へ入る．超対称性は大統一とは独立の独自の対称性と考えてもよく，超対称粒子 (超粒子もしくは SUSY 粒子ともいう) の探索はそれ自身興味のある研究対象である．超対称性をゲージ化すると重力理論に到達するので，究極の統一理論には不可欠と考えられる．ここでは，低エネルギー現象に関係するところのみ定性的にふれることにする．

5.1 なぜ大統一か[1)]

標準理論に内在するパラメターの数は 20 近くもある．

結合定数：$\Lambda_{\overline{MS}}$ (または α_s)，e，$\sin\hat{\theta}_W$

質量：ゲージボソン；$W^{\pm}$ および Z^0

フェルミオン；m_q, m_l (9個)

スカラー粒子；m_H

KM 行列：$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta$

世代数：n_g

QCD の CP パラメター θ

アインシュタインの重力方程式が，パラメターとして万有引力定数1個しか含まないことと対比すると，標準理論が真の統一理論にはほど遠いことは明かである．特に，対称性を破る機構すなわち質量問題を解くには，ヒッグスの本質を明らかにしなければならないが，この問題については第3章で議論した．フェルミオンの中ではニュートリノの質量が特殊な役割を演じる．ニュートリノに質量を与えるためには標準理論を拡張する必要性があることは第4章ですでに議論した．

クォークとレプトンの数はこれでつきているのか，なぜ世代が繰り返されるのかという世代の謎は，古くは e-μ の謎といわれ歴史は古いが，未だに手がかりがまったくつかめないところである．群を拡張して世代をまるごと包含するようなモデルもつくれなくはないが，いまのところ成功しているとはいいがたい．一つの見方は，クォークとレプトンを，より根元的な粒子（サブクォークまたはプレオン）の複合体と見なして，各世代は第1世代（基底状態）の励起状態とすることであるが，質量スケールが $m_t/m_e \sim 10^5$ も違う粒子を一つの束縛状態にまとめられるかは大いに疑問である．以下では，大統一理論へ進むことによって，解決の可能性のある事項をいくつかあげる．

5.1.1 ワインバーグ角の不定性

標準理論は，$SU(3)_{\mathrm{color}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群に基づくゲージ理論として記述され，少なくも電磁力と弱力部分については不完全ながらも統一ができている．不完全という意味は，$SU(2)$ 群と $U(1)$ 群が一つの群にはまとまっていないので，電磁力と弱力の二つの結合定数は独立であり，ワインバーグ混合角という不定パラメターを導入せざるをえない不満があることである．したがって，次の目標は当然のことながら，ワインバーグ角を決められるような，より

大きな群を見つけることである．さらに電弱相互作用とはまったく切り離されているように見えるQCDも，ゲージ理論に立脚するという共通点に着目すれば，三つの力をすべて含むゲージ群 G が存在するのではないかという希望をもたせる．これが可能ならば，ワインバーグ角を含めて3個の結合定数を1個に減らせるであろう．大統一とは，電弱強の三つの相互作用の統一のことをさす．重力を含む統一は超大統一とでもいうべきなのであろうが，まだ定着した慣用の名称はない．超対称ゲージ理論は超大統一理論の一つであるが，通常は超重力理論 (super gravity，略してSUGRA) と特別の名前を与えられている．

5.1.2　電荷の量子化

群 G の存在すべき理由はまだある．標準理論では，電磁相互作用は $U(1)$ ゲージグループに属するが，アーベル群のゲージ場の方程式は線形であり結合定数の規格は自由である．いいかえると，電荷は量子化される必然性はなく，各粒子は任意の電荷をもちうる．しかし，われわれは陽子の電荷と電子の電荷は 10^{-21} の精度で等しく[2]，クォークの電荷が電子の電荷の正確に1/3であることを知っている．したがって，電荷の量子化は理論の中に本来組み込まれていなければばならないはずのものである．電荷がより大きな単純ゲージ群 G の生成演算子（L_i と書く）の組み合わせでつくられる保存量であるならば，多重項ごとに

$$\mathrm{Tr}(L_i)=0 \tag{5.1}$$

を満たすので量子化が達せられる*1)．群 G は，標準理論を含まないといけないから，

$$G\supset SU(3)\times SU(2)_L\times U(1) \tag{5.2}$$

が条件である．

5.1.3　三角異常項

われわれはレプトンが強い相互作用をもたず，クォークとは大いに性質を異

---

*1)　三角異常項をなくするという条件でも決めることができる．この方がより本質的という考え方もある．

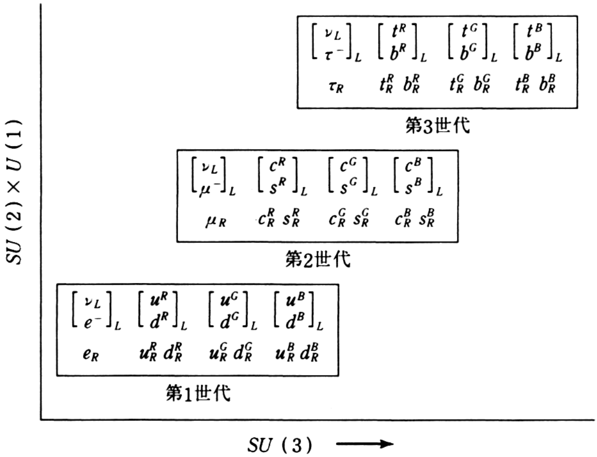


図 5.1 素粒子の家族構成と世代構造

にしていることを知っている．電弱相互作用を共有するとはいえ，バリオン数およびレプトン数保存によって両者が混じらないことは保証されているように見える．しかし，統一ゲージ理論の枠組みの中では，ゲージ不変性に保証されない保存則は破られていても不都合は生じない．いったん，この垣根を越えて虚心坦懐に眺めてみれば新しい世界が開ける．すなわち，現象論的に分類すると素粒子群がクォークとレプトンで家族を構成すること，少なくも 3 世代の家族が存在すること，標準理論は各家族の中で完全に閉じることに注目しよう(図 6.1)．そこで，もしバリオン数やレプトン数保存を破るような共通の相互作用が存在すれば，クォークとレプトンは混合しうる．つまり，クォークとレプトンが家族を構成するからには同じ仲間であろうという論理である．現象的にはクォークとレプトンを結びつけるべき理由はこのくらいしかないが，理論的には，三角異常項[3] の消去という強い理由が存在する．

軸性カレント $J_5{}^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ はフェルミオンの質量が 0 であれば，トリーレベルでは保存するが，いわゆる三角図 (図 5.2 (a)) と呼ばれるループ効果によって，カレント保存則が成立しなくなる．異常項はフェルミオンループの三つのヴァーテックスのうち，一つまたは三つに軸性カレントが結合し，他のヴァーテックスは極性カレントに結合するときに生じる (§ 6.2 でさらに詳しく説明する)．異常項の寄与は，

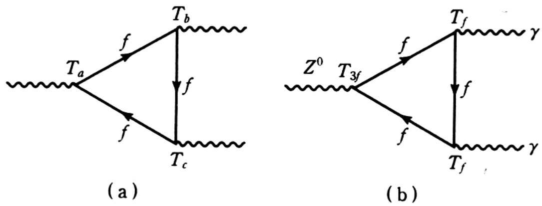


図 5.2　三角異常項．フェルミオン (f) のつくるループに 3 種のカレントが結合する．(a) は一般にゲージ群生成演算子行列 T_a, T_b, T_c で結合している場合．(b) は $Z\gamma\gamma$ が結合する場合．

$$\partial_\mu J_5{}^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}] = \frac{g^2}{64\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{a\mu\nu}G_a{}^{\mu\nu} \tag{5.3}$$

で与えられる．$G_{\mu\nu}$ は，このフェルミオンに結合するゲージ場である．軸性カレントに基づく対称性には，この異常項により破られる危険性が常に内在するが，これが大域対称である場合には害はない．しかし，局所対称すなわちゲージカレントが関与するときは問題となる．この三角図によってカレント保存則が破れるので，繰り込みが不可能という重大事態となる．標準理論は $SU(2)_L$ 群，つまりカイラルゲージ群に基づくので，三角異常項の発生は避けられない．繰り込み可能性が正しい理論の条件であるならば，三角異常項は存在してはならないのである．三角異常項が消滅するための条件は，種々のフェルミオンのつくる三角異常項の和が相殺することである．簡単な例として，一つのヴァーテックスが軸性ベクトルに，他の二つが極性ベクトルに連がっている場合，すなわち $Z\to\gamma\gamma$ (図 5.2 (b)) を考慮してみよう．$Z\to\gamma\gamma$ の場合は，フェルミオン f の Z との結合が $g_Z{}^f$，γ との結合が Q_f であるので，

$$\sum_f g_{ZA}{}^f Q_f{}^2 N_c{}^f = 0 \tag{5.4}$$

であれば，異常項は消滅する．$g_Z{}^f$ の軸性部分は T_{3L} であるから，$Q=T_3+Y/2$ および $\sum T_3$, $\sum T_3{}^3$ は，各多重項の中で和をとると 0 になる事実を使うと，

$$\sum_f g_{ZA}{}^f Q_f{}^2 N_c{}^f \fallingdotseq \sum_f T_{3L}{}^f (T_{3L}{}^f + Y/2)^2 N_c{}^f = 2\sum_f T_{3L}{}^2 Q_f N_c{}^f \tag{5.5}$$

標準理論では，左巻き粒子はすべて 2 重項の中にあり，$(T_{3L})^2$ が同一であることから

$$\sum Q_f N_c^f = 0 \tag{5.6}$$

が，異常項の消滅条件となる．そこで，各粒子の電荷の和をとってみると，

$$\sum Q_f N_c = 3(Q_u + Q_d) + (Q_\nu + Q_e) = 0 \tag{5.7}$$

となり，まさにこの条件を満たしている．このことは単なる偶然とは考えにくい．正しい理論では異常項の消滅が保証されているとすれば，クォークとレプトンとは常に組になっていなければならないのである．つまり，クォークとレプトンを包含する家族構造は本質的な性質と考えざるをえない．したがって，クォークとレプトンを統合する大統一理論は当然な論理的帰結となる．

なお，異常項消滅の一般的条件は，各（カイラル）ゲージ群の生成演算子を T_a とするとき，

$$\mathrm{Tr}(T_a\{T_b, T_c\})_L - \mathrm{Tr}(T_a\{T_b, T_c\})_R = 0 \tag{5.8}$$

で与えられる．標準理論では第 2 項は 0 であったが，大統一では第 2 項が必ずしも 0 になる必要はない．実際のところ，第 2 項が第 1 項に等しい理論（ベクトル型という），例えば，$SO(10)$ のように左右対称な大統一理論は，自動的に異常項を消すのが一つの魅力となっている．いずれにせよ，異常項消滅は群 G を選ぶときの一つの条件となる．

5.2 $SU(5)$

5.2.1 大統一のスケール

大統一が可能であるためには，あるエネルギースケールで，3 個の結合定数，α_i が一致する必要がある．スケール μ に依存する結合定数 $\alpha_i(\mu)$ は，繰り込み群方程式（1.23）を満たし，最低次では

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(m_W)} + \frac{\beta_i}{2\pi}\ln\left(\frac{\mu}{m_W}\right) + \cdots \tag{5.9}$$

と表される．ここに，α_i は $SU(i)$ の結合定数で，係数 β_i はゲージボソンの自己エネルギーに寄与するフェルミオンとボソンのループを計算することにより得られる．

非アーベル群では，$\beta_i > 0$ となり漸近自由が成立する．$\alpha_i(m_W)$ に測定値を入れると，各 α_i の発展は，定性的に図 5.3 のように表され，$\mu \sim 10^{15}$ GeV で

3個の結合定数は大体一致する[4]．したがって，単一の大統一群 G が存在する可能性は十分にある．しかも，このエネルギーはプランクエネルギー $M_{Pl}(=(\hbar c/G_{\mathrm{Newton}})^{1/2})\sim 10^{19}$ GeV よりはまだ下であるので，将来，重力まで含める超大統一の可能性が残されている．

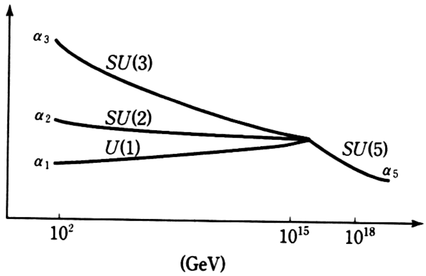


図 5.3　$SU(i)$ 群の結合定数の発展と大統一のスケール
大統一が成立するためには，あるスケール（大統一スケール）で結合定数が一致しなければならない．ただし，3個の結合定数が必ずしも同時に一致する必要はなく，あるスケール μ_1 で2個の結合定数が一致し，別のスケール μ_2 で3個が一致してもよい．

群 G の可能性はいろいろあるが，大統一理論の基本的構造と筋道を理解するには，最も簡単な $SU(5)$ を考えるのがよい[5]．実験データに整合させるためには多少の修正が必要であるが，それは後ほど議論することにして，以下の議論は特に断らない限り，$SU(5)$ に限定する．

5.2.2　フェルミオンの表現

$SU(5)$ の生成演算子は $5^2-1=24$ 個ある．ランクは $5-1=4$ であるので，24個の $SU(5)$ の生成演算子 L_i のうち対角化可能なものは4個ある（II-付録F参照）．これを $SU(3)$ カラー群の λ_3, λ_8，アイソスピン I_3($SU(2)$ の I_3) および $U(1)$ の超電荷 $Y(=2(Q-I_3))$ に対応させることにする．次にクォークとレプトンがどの表現に属するかを考察するために，基本的なフェルミオンの量子数を，$SU(3)$ の表現次元数，$SU(2)$ の表現次元数，$U(1)$ の超電荷 Y で表して整理してみよう．15個ある第1世代の既知のフェルミオンは，

		多重度
(u_L, d_L)	$(3, 2, 1/3)$	6

$d^c{}_L$	$(3^*, 1, 2/3)$	3	
$u^c{}_L$	$(3^*, 1, -4/3)$	3	
(ν_L, e_L)	$(1, 2, -1)$	2	
$e^c{}_L$	$(1, 1, 2)$	1	(5.10)

のように表される．ここで，アイソスピン1重項の d_R, u_R, e_R の代りに $d^c{}_L$, $u^c{}_L$, $e^c{}_L$ のように荷電共役の形で書いた理由は，ゲージ理論による相互作用はベクトル型でありカイラリティを変えないこと，したがって，1重項の粒子をも含めてすべての粒子を同じ多重項にあてはめるためには，カイラリティを揃えておく必要があるからである．なお，右巻きのニュートリノ

$$\nu_L{}^c \qquad (1, 1, 0) \tag{5.11}$$

は，標準理論では存在しないが，大統一理論には現れる可能性があるので，必要に応じて使うことにする．これら15個の既知のフェルミオンを，$SU(5)$ の最小次元の表現，**5** と **10** に属させて矛盾が生じないかを眺めてみよう．本当は，まとめて一つの表現の中に入れる方がすっきりするが，別々にしては不可という理由はない．(5.10) を眺めれば，$\mathbf{5}^*$ をつくる可能性が2通りある．$q=d, u$，カラーの自由度を指標 i $(i=1\sim3)$ で表すことにして，

$$(q^c{}_L{}^i, \nu_L, e_L) = (3^*, 1, Y) \oplus (1, 2, -1) = \mathbf{5}^* \quad (q=u \text{ または } d) \tag{5.12}$$

この2通りの不定性は，多重項内の電荷を考慮することにより一意的に決められる．電荷 Q は，

$$Q = I_3 + Y/2 \tag{5.13}$$

で与えられるので，$SU(5)$ 群の場合は，2個の無軌跡 (traceless) の生成演算子の和となり，したがって Q もまた無軌跡である．これは，標準理論では Y (したがって Q にも) に条件がつけられなかったのとは事情を異にしている．このことから多重項内の粒子の電荷の和は0とならなければならない．すなわち，

$$\sum_{a=1}^{5} Q_a = 3 \cdot Q_{qc} + Q_\nu + Q_e = 0$$
$$\therefore \quad Q_q = -Q_{qc} = -1/3 \tag{5.14}$$

したがって，$\mathbf{5}^*$ に属する3個の $q^c{}_{\mathrm{L}}{}^i$ は $d^c{}_{\mathrm{L}}{}^i$ でなければならない．基本表現 **5** に属する場を $\psi_5{}^a$ $(a=1\sim5)$ と書くことにすると[*2]，(5.12) の複素荷電共役

をとり，

$$\psi_5{}^a=\begin{bmatrix} d_R{}^1 \\ d_R{}^2 \\ d_R{}^3 \\ e_L{}^c \\ -\nu_L{}^c \end{bmatrix}=(3,1,-2/3)\oplus(1,2,1) \tag{5.15 a}$$

$$\overline{\psi_{5a}}=\psi_5{}^{a\dagger}\gamma^0=(\overline{d_R{}^1},\ \overline{d_R{}^2},\ \overline{d_R{}^3},\ \overline{e_L{}^c},\ -\overline{\nu_L{}^c}) \tag{5.15 b}$$

のように表される．$a=1\sim3$ はカラーの指標 R, G, B に対応し，$a=4,5$ は，アイソスピン $I_3=+1/2$，$-1/2$ に対応する．これで，基本表現 **5** の中の各要素 $\psi_5{}^a$ の量子数が決まった．すでに大統一の利点の一つが明らかである．電荷は量子化され，クォークの電荷がレプトンの電荷の 1/3 の整数倍であることが説明できた．

次元数の大きい表現内の量子数は 5 次元表現の積をつくることにより決めることができる．たとえば，$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}=\mathbf{15}_\mathrm{S}\oplus\mathbf{10}_\mathrm{A}$ であるので（表 5.1），表現 **10** は，

$$\psi_{10}{}^{ab}\sim\psi_5{}^a\psi_5{}^b-\psi_5{}^b\psi_5{}^a$$

のように，a, b の指標について反対称である．したがって，$a, b=1\sim3$ の部分は，カラー積表現 $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{6}_\mathrm{S}\oplus\mathbf{3}_\mathrm{A}{}^*$ の $\mathbf{3}^*$ に対応するので，$u^c{}_L{}^i$ に当てはめられる．同様にして，$a, b=4,5$ には，アイソスピン 0 の $e_L{}^c$ が対応する．$a=1\sim3$，$b=4,5$ は，カラーで 3，アイソスピン $I=1/2$ に対応するから，(u_L, d_L) がこれに該当する．まとめて，表現 **10** の要素 $\psi_{10}{}^{ab}$ は

$$\psi_{10}{}^{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0, & u^{c3}, & -u^{c2}, & -u^1, & -d^1 \\ -u^{c3}, & 0, & u^{c1}, & -u^2, & -d^2 \\ u^{c2}, & -u^{c1}, & 0, & -u^3, & -d^3 \\ u^1, & u^2, & u^3, & 0, & -e^c \\ d^1, & d^2, & d^3, & e^c, & 0 \end{bmatrix}_L \tag{5.16}$$

のように表すことができる．$1/\sqrt{2}$ は規格因子であり，L の指標は左巻きを表す．これによって，15 個の既知のフェルミオンが，正しい量子数をもちつつ

*2) （前ページ）以下，$SU(5)$ 群の指標を，便宜上テンソル形式に書き，列ベクトルを反変ベクトルのように，行ベクトルは共変ベクトルのように見なして，上つきおよび下つきの指標を導入すると便利である．上下同じ指標が現れたときは和をとることと約束する．

過不足なくきっちりと**5**と**10**に納まった．$\nu_L{}^c$ の入る余地はないので，無理に入れようと思えば，1重項表現にあてはめるしか手はない．表5.1に，よく現れる基本的な $SU(5)$ 表現と，それを $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ に分解したときの構成を示す．

表 5.1 $SU(5)$ の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 表示[*3)]

$SU(5)$ 表現	$(SU(3),\ SU(2),\ Y)$	コメント
5	$(3, 1, -2/3)\oplus(1, 2, 1)$	基本表現
10	$(3, 2, 1/3)\oplus(3^*, 1, -4/3)\oplus(1, 1, 2)$	反対称
15	$(6, 1, -4/3)\oplus(3, 2, 1/3)\oplus(1, 3, 2)$	対称
24=**24***	$(8, 1, 0)\oplus(3, 2, -5/3)\oplus(3^*, 2, 5/3)\oplus(1, 3, 0)\oplus(1, 1, 0)$	随伴表現
45	$(8, 2, 1)\oplus(6^*, 1, -2/3)\oplus(3, 3, -2/3)\oplus(3^*, 2, -7/3)$ $\oplus(3, 1, -2/3)\oplus(3^*, 1, 8/3)\oplus(1, 2, 1)$	
50	$(8, 2, 1)\oplus(6, 1, 8/3)\oplus(6^*, 3, -2/3)\oplus(3^*, 2, -7/3)$ $\oplus(3, 1, -2/3)\oplus(1, 1, -4)$	
$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}=\mathbf{15}_S\oplus\mathbf{10}_A$, $\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}$, $\mathbf{5}^*\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}\oplus\mathbf{45}$, $\mathbf{10}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}^*\oplus\mathbf{45}^*\oplus\mathbf{50}$, $\mathbf{10}^*\otimes\mathbf{10}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}\oplus\mathbf{75}$		

5.2.3 ゲージ粒子

a．随伴表現 (adjoint representation)

次に，$SU(5)$ 群の生成演算子 $[L_i]^a{}_b(i=1\sim24,\ a, b=1\sim5)$ をつくろう．基本表現**5**を参照すれば，$a, b=1\sim3$ はカラー，$a, b=4, 5$ はアイソスピンの指標であるから，$i=1\sim8$ を QCD，$i=9\sim11$ を $SU(2)$ の生成演算子に対応させて

$$L_i(i=1\sim8)=\begin{bmatrix} & & & 0, & 0 \\ & \lambda_i & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}\quad L_i(i=9\sim11)=\begin{bmatrix} & & & 0, & 0 \\ & 0 & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & 0, & \multicolumn{2}{c}{\sigma_j} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

のようにとることにする．ただし，σ_j は $j=1\sim3$ とする．これら L_i は

$$\mathrm{Tr}(L_iL_j)=2\delta_{ij} \tag{5.18}$$

という規格条件を満たす．$L_3, L_8, L_{11}=2I_3$ が対角行列であるから，もう一つ

*3) 積表現のつくり方については，II-付録 F を参照のこと．

の対角行列を $L_{12}=cY$ とすれば，表現**5**の Y (5.15) を参照し，(5.18) の規格条件を使えば，

$$L_{12}=\sqrt{\frac{3}{5}}Y=\sqrt{\frac{3}{5}}\begin{bmatrix} -2/3, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -2/3, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -2/3, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

と表されることがわかる．残りの 12 個の生成演算子 $L_{13}\sim L_{24}$ は，

$$L_{13}=\begin{bmatrix} & & & 1, & 0 \\ & 0 & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} \qquad L_{14}=\begin{bmatrix} & & & i, & 0 \\ & 0 & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ -i, & 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.20 a}$$

$$L_{19}=\begin{bmatrix} & & & 0, & 1 \\ & 0 & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & & \\ 1, & 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} \qquad L_{20}=\begin{bmatrix} & & & 0, & -1 \\ & 0 & & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & & \\ i, & 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.20 b}$$

のようにしてつくることができる．$L_{15}\sim L_{18}$, $L_{21}\sim L_{24}$ は上記にならう．$L_{13}\sim L_{24}$ は，クォークとレプトンを入れ替える演算子であり，標準理論にはなくて大統一によって新しく出現した演算である．

ゲージボソン V_μ の属する表現**24**は次のように表すことができる．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}V_\mu=\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{2}V_\mu{}^iL_i \tag{5.21 a}$$

$$V_\mu=\begin{bmatrix} G^1{}_1-2B/\sqrt{30}, & G^1{}_2, & G^1{}_3, & \overline{X}_1, & \overline{Y}_1 \\ G^2{}_1, & G^2{}_2-2B/\sqrt{30}, & G^2{}_3, & \overline{X}_2, & \overline{Y}_2 \\ G^3{}_1, & G^3{}_2, & G^3{}_3-2B/\sqrt{30}, & \overline{X}_3, & \overline{Y}_3 \\ X^1, & X^2, & X^3, & W^0/\sqrt{2}+3B/\sqrt{30}, & W^+ \\ Y^1, & Y^2, & Y^3, & W^-, & -W^0/\sqrt{2}+3B/\sqrt{30} \end{bmatrix} \tag{5.21 b}$$

$$G^1{}_2=g_1,\quad G^2{}_1=g_2,\quad G^1{}_3=g_4,\quad G^3{}_1=g_5,\quad G^2{}_3=g_6,\quad G^3{}_2=g_7$$

$$G^1{}_1=\frac{g_3}{\sqrt{2}}+\frac{g_8}{\sqrt{6}},\quad G^2{}_2=-\frac{g_3}{\sqrt{2}}+\frac{g_8}{\sqrt{6}},\quad G^3{}_3=-\sqrt{\frac{2}{3}}g_8 \tag{5.21 c}$$

$g_i(i=1\sim8)$ はグルーオンを表す．X, Y が大統一により出現した新しいゲージボソンで，クォークとレプトンを互いに変換する作用をもつ．量子数で表せば，$X\sim d_L{}^c e_R{}^c$ または $u_R u_L$，$Y\sim d_L{}^c \nu_R{}^c$ または $u_R d_L$ と同じであるので，カラー量子数，レプトン量子数，アイソスピン量子数を合わせもつ．$SU(3)$, $SU(2)$ の表現で書けば

$$X,\ Y=(3^*, 2) \tag{5.22 a}$$

電荷，アイソスピン，超電荷で書けば

$$X(Q, I_3, Y)=(4/3,\ 1/2,\ 5/3)$$
$$Y(Q, I_3, Y)=(1/3,\ -1/2,\ 5/3) \tag{5.22 b}$$

で表される．このゲージ場を使うと，共変微分およびラグランジアンの中の運動エネルギー部分が，ゲージ場 V と ψ_5 についてはすぐに書き下ろせて，

$$\mathcal{L}_{VKE}+\mathcal{L}_{5KE}=-\frac{1}{8}\mathrm{Tr}[f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}]+i\overline{\psi_5}\gamma^\mu D_\mu\psi_5 \tag{5.23 a}$$

$$=-\frac{1}{8}(f^{\mu\nu})^a{}_b(f_{\mu\nu})^b{}_a+i\overline{\psi_{5a}}\gamma^\mu\left\{\delta^a{}_b\partial_\mu+i\frac{g_5}{\sqrt{2}}(V_\mu)^a{}_b\right\}\psi_5{}^b \tag{5.23 b}$$

$$(f_{\mu\nu})^a{}_b=\partial_\mu(V_\nu)^a{}_b+\frac{ig_5}{\sqrt{2}}(V_\mu)^a{}_c(V_\nu)^c{}_b-(\mu\leftrightarrow\nu) \tag{5.23 c}$$

ただし，g_5 は $SU(5)$ に伴う結合定数である．ψ_{10} に対する共変微分とラグランジアンは，多少の群論計算を必要とするが，

$$\mathcal{L}_{10KE}=i\overline{\psi_{10ab}}\gamma^\mu(D_\mu\psi_{10})^{ab}$$
$$=i\overline{\psi_{10ab}}\gamma^\mu\left\{\delta^a{}_c\partial_\mu+i\frac{2g_5}{\sqrt{2}}(V_\mu)^a{}_c\right\}\psi_{10}{}^{cb} \tag{5.24}$$

であることが示せる．

証明　基本表現ベクトルを ψ^a，10 次元ベクトル ψ_{10} のテンソル表現を χ^{ab}，ψ 空間での生成演算子を $L_A{}^a{}_b$，χ 空間での生成演算子を $L_A{}^{ab}{}_{cd}$（以上すべて，$A=1\sim24$，$a, b=1\sim5$）と書く，χ^{ab} は（$\psi^a\psi^b-\psi^b\psi^a$）のように変換するので，微小変換を考えると

$$\psi'=(1-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A)\psi=(\delta^a{}_b-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^a{}_b)\psi^b \tag{5.25}$$

$$\chi^{ab\prime}=(\delta^{ab}{}_{cd}-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^{ab}{}_{cd})\chi^{cd}$$

$$=(1/2)[(\delta^a{}_c-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^a{}_c)(\delta^b{}_d-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^b{}_d)-(c\leftrightarrow d)]\chi^{cd} \quad (5.26)$$

が成立する．これから

$$L_A{}^{ab}{}_{cd}=(1/2)(\delta^a{}_c L_A{}^b{}_d+\delta^b{}_d L_A{}^a{}_c-\delta^a{}_d L_A{}^b{}_c-\delta^b{}_c L_A{}^a{}_d) \quad (5.27)$$

が導ける．ラグランジアンの中には双1次形式で現れるので

$$\bar{\chi}_{ab}L_A{}^{ab}{}_{cd}\chi^{cd}=2\bar{\chi}_{ac}L_A{}^c{}_b\chi^{ab}=2\bar{\chi}_{ac}L_A{}^a{}_b\chi^{bc} \quad (5.28)$$

である．ゲージベクトル場の行列表現 $V_\mu=V^A{}_\mu L_A/\sqrt{2}$ を使えば，ラグランジアンの中の運動量項は

$$\mathscr{L}_{10}=i\bar{\chi}_{ac}\gamma^\mu\left[\delta^a{}_b\partial_\mu+\frac{i2g_5}{\sqrt{2}}(V_\mu)^a{}_b\right]\chi^{bc} \quad (5.29)$$

と書ける． (証明終)

b．ワインバーグ角

(5.23) より直ちに大統一スケール $\mu\simeq M_{\mathrm{GUT}}$ では，

$$g_{\mathrm{color}}(\equiv g_3)=g_W(\equiv g_2)=g_5 \quad (5.30)$$

が成立していることがいえる．次に，$U(1)$ ゲージボソン B の結合定数を求めるために，ラグランジアンから中性の $W_\mu{}^0$ と B_μ を含む項を抜き出し，フォトン場 A_μ と $Z_\mu{}^0$ で書き直すと

$$\frac{g_5}{2}[W^0L_{11}+BL_{12}]$$

$$=\frac{g_5}{2}[(\hat{s}_WA+\hat{c}_WZ)L_{11}+(\hat{c}_WA-\hat{s}_WZ)L_{12}]$$

$$=\frac{g_5}{2}[(\hat{s}_WL_{11}+\hat{c}_WL_{12})A+(\hat{c}_WL_{11}-\hat{s}_WL_{12})Z]$$

$$\equiv[eQA+g_ZQ_ZZ] \quad (5.31\,\mathrm{a})$$

ただし，$\hat{s}_W=\sin\hat{\theta}_W\equiv\sin\theta_{W\overline{MS}}$，$\hat{c}_W=\cos\hat{\theta}_W$ である．これより，電荷行列 Q は

$$eQ=\frac{g_5}{2}(\hat{s}_WL_{11}+\hat{c}_WL_{12}) \quad (5.31\,\mathrm{b})$$

と表せる．電荷行列は一方で $Q=I_3+Y/2$ と表せるから，$I_3=L_{11}/2$ および $Y=\sqrt{5/3}L_{12}$ を使えば，

$$Q=\frac{1}{2}\left(L_{11}+\sqrt{\frac{5}{3}}L_{12}\right) \quad (5.32)$$

と書けるので，(5.31 b) と比較して，

$$e = g_5 \sin\hat{\theta}_W \tag{5.33 a}$$

$$g_B = \frac{e}{\cos\hat{\theta}_W} = \sqrt{3/5}\, g_5 = g_5 \tan\hat{\theta}_W \tag{5.33 b}$$

$$\sin\hat{\theta}_W = \sqrt{3/8} \tag{5.34}$$

が導ける．この $\sin\hat{\theta}_W$ の値は，大統一スケール ($\mu \fallingdotseq 10^{15}$ GeV) での値であることを注意しておく．

5.2.4 対称性の破れ

X, Y ゲージボソンは，クォーク ↔ レプトン間の遷移を引き起こすが，陽子は十分安定であることが知られている．陽子崩壊率を実験データと矛盾させないためには，X, Y の質量 M_X, M_Y は十分重くする必要がある．そのためには対称性の自発的破れが生じていて，

$$SU(5) \longrightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1) \longrightarrow SU(3)_c \times U(1)_{EM} \tag{5.35}$$

のように対称性が 2 段階で破れるとする．まず大統一エネルギースケール ($\mu \sim M_{GUT} \simeq 10^{15}$ GeV) で第 1 段階の破れが生じて X, Y に質量を与え，第 2 段階 ($\mu \sim 250$ GeV) で標準理論における弱相互作用と電磁相互作用への分化が起こり，W と Z が質量を獲得したとする．第 1 段階でゲージボソンである X, Y に質量を与えるには，24 次元表現に属するヒッグス $\boldsymbol{\Phi}^a{}_b$ が，

$$\langle \boldsymbol{\Phi} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -3/2 & \\ & & & & -3/2 \end{bmatrix} V \tag{5.36}$$

のような真空期待値を獲得するとすればよい[6]．

これをみるために，まず共変微分 D_μ を求める．$\mathbf{24} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^*$ であるから，$\boldsymbol{\Phi}_i$ ($i = 1 \sim 24$) を

$$\boldsymbol{\Phi}^a{}_b(a, b = 1 \sim 5) = \psi_5{}^a \psi_5{}^*{}_b - \frac{1}{5}\delta^a{}_b \psi_5{}^c \psi_5{}^*{}_c \tag{5.37}$$

という 5×5 行列の形に表せる ((5.21b) のゲージボソンの表式を参照せよ)．

$\psi_5, \psi_5{}^*$ は $SU(5)$ 変換で

$$\psi_5{}^a \longrightarrow \psi_5{}^a + \delta\psi_5{}^a = \psi_5{}^a - i\frac{g_5}{\sqrt{2}} V_\mu{}^a{}_c \psi_5{}^c \tag{5.38 a}$$

$$\psi_5{}^*{}_b \longrightarrow \psi_5{}^*{}_b + \delta\psi_5{}^*{}_b = \psi_5{}^*{}_b + i\frac{g_5}{\sqrt{2}} \psi_5{}^*{}_c V_\mu{}^{\dagger c}{}_b \tag{5.38 b}$$

などの変換を受けるから，Φ の変換は

$$\Phi^a{}_b \longrightarrow \Phi^a{}_b - i\frac{g_5}{\sqrt{2}}[V_\mu, \Phi]^a{}_b \tag{5.39}$$

で与えられることになり，対応する共変微分は

$$[D_\mu \Phi]^a{}_b = \partial_\mu \Phi^a{}_b + i\frac{g_5}{\sqrt{2}}[V_\mu, \Phi]^a{}_b \tag{5.40}$$

これに対応してヒッグスラグランジアンの運動エネルギー項は，

$$\mathcal{L}_{KE} = \mathrm{Tr}[(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] \tag{5.41}$$

のように書ける．ゲージボソンの質量項は，Φ をヒッグスの真空期待値で置き換えて得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{Mass}} &= \mathrm{Tr}[(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)]|_{\Phi=\langle\Phi\rangle} \\ &\longrightarrow \frac{g_5{}^2}{2}\mathrm{Tr}\{[V_\mu, \Phi]^\dagger[V_\mu, \Phi]\} \equiv -m^2{}_{ij} V_\mu{}^i V^{\mu j\dagger}\end{aligned} \tag{5.42}$$

Φ と V_μ が，

$$\Phi \sim \begin{bmatrix} p & & & & \\ & p & & 0 & \\ & & p & & \\ & 0 & & q & \\ & & & & q \end{bmatrix}, \qquad V_\mu \sim \left[\begin{array}{c|c} 3\times 3 & A \\ \hline B & 2\times 2 \end{array}\right] \tag{5.43}$$

の形をもっていれば，

$$[V_\mu, \Phi] \sim \left[\begin{array}{c|c} 0 & -(p-q)A \\ \hline (p-q)B & 0 \end{array}\right] \tag{5.44}$$

の形になるので，(5.42) の中の V^i は X または Y のみが生残り，望む形となる．$p=V$, $q=-3V/2$ とすれば，

$$M_X{}^2 = M_Y{}^2 = \frac{25 g_5{}^2 V^2}{8} \simeq 0.94\, V^2 \tag{5.45}$$

g_5 の値については，後述の (5.54) を参照せよ．真空期待値 V はだいたい大統一のエネルギースケール程度であるから，$M_X \simeq 10^{15}$ GeV である．Φ のつくるポテンシャルの形は，標準理論のヒッグス場のポテンシャルが，

$$P(|\phi|^2)=\lambda\left(|\phi|^2-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right) \tag{5.46}$$

と表せることにならってつくる．自発的に対称性を破るためには $|\Phi|$ の 4 乗までの項を含む必要があるから一般的な形で表して

$$P(|\Phi|)=-\frac{\mu^2}{2}\mathrm{Tr}(\Phi^2)+\frac{a}{4}[\mathrm{Tr}(\Phi^2)]^2+\frac{b}{2}\mathrm{Tr}(\Phi^4) \tag{5.47}$$

とする．Φ の 3 乗の項はあってもよいが簡単のため省く，$b>0$, $\mu^2>0$, $a>7b/5$ ならば，ポテンシャルの最小値が唯一に決まる．このとき，Φ の真空期待値は $\partial P/\partial\Phi|_{\Phi=<\Phi>}=0$ から得られて，

$$V^2=\frac{2\mu^2}{15a+7b} \tag{5.48}$$

となる．

この Φ の真空期待値のもたせ方を工夫して，電弱相互作用の対称性の破れをも同時に起こすことは可能であろうか．答はノーである．理由の第 1 は，**24** の中には W, Z の質量をもたせるのに必要な“カラー1 重項かつアイソスピン 1/2”の成分が存在しない (表 5.1 参照)．また，フェルミオンの質量項は $\overline{\psi}_R\psi_L$+h.c. の形をしているが，ヘリシティ L の状態で書き直すと，$(\psi^c{}_L)^T C\psi_L$+h.c. の形となる．フェルミオンは $\mathbf{5}^*, \mathbf{10}$ に属しているから，質量項の $SU(5)$ 表現は表 5.1 により，

$$\begin{aligned}\mathbf{5}^*\otimes\mathbf{5}^*&=\mathbf{10}^*\oplus\mathbf{15}^*\\ \mathbf{5}^*\otimes\mathbf{10}&=\mathbf{5}\oplus\mathbf{45}\\ \mathbf{10}\otimes\mathbf{10}&=\mathbf{5}^*\oplus\mathbf{45}^*\oplus\mathbf{50}\end{aligned} \tag{5.49}$$

のどれかとなるので，**24** とは結合できない．したがって，フェルミオンもまた質量を獲得できない．そこで，前述したように第 2 段階の対称性の破れが必要となるのである．この第 2 の対称性の破れを起こすヒッグス場の表現は，上式を参照すれば **5** および **45** が候補になりうる．最も簡単な $SU(5)$ モデルでは **5** を使う．5 次元表現の H_5 は $I=1/2$ を含むから，

$$\langle H_5\rangle=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\v/\sqrt{2}\end{bmatrix}=(3,1,Y)\oplus(1,2,Y) \tag{5.50}$$

ととれば，標準理論で必要な質量スペクトルを獲得させることができる．相互作用は次のような形となる．

$$u:[\mathbf{10}]\times[\mathbf{10}]\times[H_5],\qquad d/e:[\mathbf{5}^*]\times[\mathbf{10}]\times[H_5{}^*] \tag{5.51}$$

具体的な形は後で与える〔(5.59)，(5.60)〕．

以上の議論の結論は，標準理論を部分として含む大統一理論の構成は可能ということである．その理論が自然を記述するかどうかは別問題であり，それを検証することがわれわれの次に直面する問題である．

5.2.5　$SU(5)$ の予言と破綻

a.　ワインバーグ角

さて，(5.30)，(5.33)，(5.34) の各相互作用の結合定数間の関係式は，大統一スケールのエネルギー領域 ($E\sim M_{GUT}\sim10^{15}\,\mathrm{GeV}$) で成り立つ関係式であり，低エネルギーでは放射補正 (5.9) を受ける．$\mu=M_{GUT}$ から発展させて低エネルギーではどのような値をとるかを見るために，β_i に各群での値を入れると[1]，

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)}=\frac{1}{\alpha_{GUT}}+\frac{1}{2\pi}\left(11-\frac{4}{3}n_g\right)\ln\left(\frac{\mu}{M_{GUT}}\right)+\cdots \tag{5.52 a}$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)}=\frac{\sin^2\hat{\theta}_W}{\alpha_{EM}}=\frac{1}{\alpha_{GUT}}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{22}{3}-\frac{4}{3}n_g-\frac{N_H}{6}\right)\ln\left(\frac{\mu}{M_{GUT}}\right)+\cdots \tag{5.52 b}$$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)}=\frac{3}{5}\frac{\cos^2\hat{\theta}_W}{\alpha_{EM}}=\frac{1}{\alpha_{GUT}}-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}n_g+\frac{N_H}{10}\right)\ln\left(\frac{\mu}{M_{GUT}}\right)+\cdots$$

$$\alpha_{GUT}=\alpha_i(M_{GUT})=g_5{}^2/4\pi \tag{5.52 c}$$

ここで，n_g はゲージボソンの放射補正ループに現れる $m_f<\mu$ のフェルミオンの世代数，N_H は $m_H<\mu$ のヒッグス 2 重項の数である．$n_g=3$, $N_H=1$ として，上式を書き換えると

$$\sin^2\hat{\theta}_W(m_W)=\frac{3}{8}-\alpha_{EM}(m_W)\frac{109}{48\pi}\ln\left(\frac{M_{GUT}}{m_W}\right) \tag{5.53 a}$$

$$\frac{\alpha_{EM}(m_W)}{\alpha_3(m_W)}=\frac{3}{8}-\frac{67}{16\pi}\alpha_{EM}(m_W)\ln\left(\frac{M_{GUT}}{m_W}\right) \tag{5.53 b}$$

$\alpha_{EM}(m_W)$, $\alpha_3(m_W)$ は求められているから，(5.53 b) から M_{GUT} が決まり，大体 10^{15} GeV 程度となる．この値を (5.53 a) に入れることにより，$SU(5)$ 大統一理論による $\sin^2\hat{\theta}_W(m_W)$ が計算できる．最近は，2-ループ効果をも入れたより精密な計算式があるので，それを使えば，

$$\alpha_{GUT}=0.0244\pm0.0002 \qquad (5.54\ \text{a})^{7)}$$

$$\sin^2\hat{\theta}_W(m_W)=0.214\pm0.004 \qquad (5.54\ \text{b})^{8,9)}$$

という結果が得られる．これは，最近の LEP 精密データに対する最適値

$$\sin^2\hat{\theta}_W=0.23124\pm0.00017 \qquad (5.54\ \text{c})^{10)}$$

とは合わない．

b. 陽子崩壊

もう一つの実験データ，陽子崩壊の考察を行うこととしよう．フェルミオンのゲージ相互作用項は，(5.23)，(5.24) で与えられているので，(5.15)，(5.16) を使って具体的に書き下ろすと，X, Y の関与するところは，

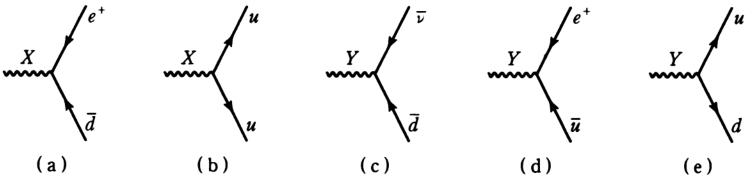
$$-\mathcal{L}_{INT}=\frac{g_5}{\sqrt{2}}[\overline{X}_\mu{}^i(\overline{d}_{iR}\gamma^\mu e^c{}_R+\overline{d}_{iL}\gamma^\mu e^c{}_L-\varepsilon_{ijk}\overline{u}^c{}_L{}^j\gamma^\mu u_L{}^k)$$
$$-\overline{Y}_\mu{}^i(\overline{d}_{iR}\gamma^\mu\nu^c{}_R+\overline{u}_{iL}\gamma^\mu e^c{}_L-\varepsilon_{ijk}\overline{u}^c{}_L{}^j\gamma^\mu d_L{}^k)+\text{h.c.}] \tag{5.55}$$

で与えられる．ただし，$ijk=1\sim3$ は，カラー自由度の和を示す．図 5.4 に (5.55) に対応する X, Y の相互作用ファインマン図を示す．これから X, Y の起こす相互作用は，バリオン数 B とレプトン数 L をともに破るが，B-L は保存していることがわかる．陽子や中性子は，図 5.5 に示すように X，Y を仲介にしてレプトンなどへ崩壊を起こす．$p\to e+\pi^0$ の図が容易に書けるということは起こりやすい反応であることを意味し，$SU(5)$ の特徴となっている．$SU(5)$ 以外のモデルでも，上記と同じような相互作用を書き下ろすことができ，陽子の種々の崩壊モードが計算できる．たいていのモデルが

$$p\longrightarrow e^++\pi^0 \qquad \sim 40\text{-}60\%$$
$$p\longrightarrow e^++\omega \qquad \sim 5\text{-}20\%$$
$$p\longrightarrow e^++\rho \qquad \sim 1\text{-}10\%$$

$$p \longrightarrow \bar{\nu}_e + \pi^+ \qquad \sim 16\text{-}24\% \tag{5.56}$$

を予言し[1]，$e+\pi^0$ モードへの崩壊が優勢という事実はかなり一般的に成立する．



	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
B	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
L	-1	0	-1	-1	0
$B-L$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

図 5.4　$X(Q=4/3)$ と $Y(Q=1/3)$ ボソンとフェルミオンの結合で B-L は保存される

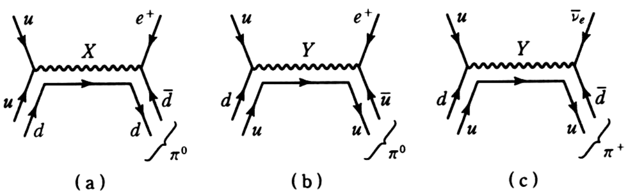


図 5.5　X, Y ボソンを介する陽子崩壊のファインマン図
(a), (b)　$p\to e^+\pi^0$　　(c)　$p\to \bar{\nu}_e\pi^+$

ゲージボソン X, Y の質量が大きいとき，陽子崩壊はフェルミ型相互作用となるから，陽子が電子と π^0 に壊れる式は，ミューオン崩壊の式とまったく同じように書けて，

$$\tau_p = \tau_\mu \left(\frac{m_\mu}{m_p}\right)^5 \left(\frac{M_X}{m_W}\right)^4 \frac{BR(p\to e\pi^0)}{F} \sim \frac{{M_X}^4}{{\alpha_5}^2 {m_p}^5} \tag{5.57 a}$$

F は，陽子内のクォーク波動関数に起因する補正因子で，かなり大きな理論的不定性を伴うが，～1 のオーダーである．計算によると[1]，

$$\tau_p(p\to e^+\pi^0) = \frac{\tau_p}{BR(p\to e\pi^0)} \fallingdotseq 4\times 10^{29\pm 0.7}\ 年 \tag{5.57 b}$$

であるが，最近のデータは[11]，

$$\tau_p(p\to e+\pi^0) > 1.6\times 10^{33}\ 年 \qquad (90\%信頼度) \tag{5.58}$$

であるので，これも実験値に合わない．

c．質量のスケール依存性

大統一ではクォークとレプトンが同一多重項内にあるので，質量についての関係式を導くことができる．特に (5.51) によって質量を発生させた場合の質量項を書き下ろすと，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YUKAWA}}=g_u\varepsilon_{ijkem}\overline{\psi_{10L}{}^{cij}}\psi_{10L}{}^{kl}H_5{}^m+g_d\overline{\psi_{5Ra}}\psi_{10L}{}^{ab}H_{5b}{}^\dagger+\mathrm{h.c.} \tag{5.59}$$

となる．ヒッグスの真空期待値を (5.50) のようにとれば上式第 2 項は

$$\mathcal{L}_d=\frac{g_dv}{\sqrt{2}}[\,\overline{\psi}_{5a}\psi_{10}{}^{a5}+\mathrm{h.c.}]=-\frac{g_dv}{\sqrt{2}}[\,\overline{d_R{}^i}\;d_L{}^i+\overline{e^c{}_R}e^c{}_L+\mathrm{h.c.}]$$

$$=-\frac{g_dv}{\sqrt{2}}[\,\bar{d}d+\bar{e}e] \tag{5.60}$$

となって，$m_e=m_d$ が結論できる．すなわち最も簡単な $SU(5)$ 大統一理論では

$$m_d=m_e,\quad m_s=m_\mu,\quad m_b=m_\tau \tag{5.61}$$

が成立する．しかし，この関係式は大統一のエネルギースケールで成立する式である．ヒッグス機構による質量は湯川結合定数と真空期待値の積であり，結合定数はスケールに依存するので，実験と比較するには繰り込み群方程式を使って低エネルギーまで外挿しなければならない．計算によれば[12)]

$$\frac{m_b(\mu_1)}{m_\tau(\mu_1)}=\frac{m_b(\mu_2)}{m_\tau(\mu_2)}\left[\frac{\alpha_3(\mu_1)}{\alpha_3(\mu_2)}\right]^{4/[11-(4n_g/3)]}\left[\frac{\alpha_1(\mu_1)}{\alpha_1(\mu_2)}\right]^{3/4n_g} \tag{5.62}$$

$\mu_1\sim10\,\mathrm{GeV}$，$\mu_2\sim M_X$ として計算すると上記の値は $\simeq2.5$ となり，実験値とよく合う．m_s/m_μ，m_d/m_e は合わないが，これはスケールが小さすぎて非摂動効果が大きいためと考えられる．いずれにせよこうした計算は，種々のモデルを構築するときに役立つ情報となる．

以上の三つの例のうち少なくも二つの実験データから，$SU(5)$ を使った最小限の大統一理論では実験データを再現できず，何らかの工夫が必要であることがわかる．

5.3 $SO(10)$

5.3.1 左右対称の世界

$SU(5)$ の欠点を修復する前に，$SU(5)$ 以外のモデルの可能性にふれておく．現象論的により魅力的にする試みであるが，$SU(5)$ のところで議論した基本的な性質は継承しており，大統一の大きな立場からは $SU(5)$ のバリエーションの一部と見なすべきものである．

標準理論は $SU(2)_L$ を含み，弱相互作用がパリティを破る．この左右非対称性は自然界の本質的性質なのであろうか．それとも，自然は本来左右対称で，対称性が破れているのは見かけだけなのだろうか．この問いかけは非常に興味あるテーマである．後者の立場をとるならば，大統一スケールでは左右の対称性が回復している可能性がある．左右対称性を回復する最も簡単な方法は，第4章で議論したように，標準理論の $SU(2)_L$ を拡大して，$SU(2)_L\times SU(2)_R$ 対称性を要求することである．右巻き粒子に結合するゲージボソン W_R の質量を左巻きゲージボソン W_L の数倍以上重くすれば，現象論的には実験データと矛盾しない．この $SU(2)_L\times SU(2)_R$ を部分群として含む大統一群の中で，よく引き合いに出されるのが $SO(10)$ と E_6 群である．$SO(10)$ は10次元の実空間の長さを不変にする変換である．E は例外群と呼ばれ，$SU(N)$ や $SO(N)$ のような一定の規則性はない．E_6 は超紐理論の低エネルギー極限として実現しうるというので人気のある群である．この二つの群は

$$\begin{aligned}
E_6\supset SO(10) &\longrightarrow SU(5)\otimes U(1)\\
&\longrightarrow SU(4)\otimes SU(2)_L\otimes SU(2)_R\\
&\longrightarrow SU(3)\otimes SU(2)_L\otimes SU(2)_R\otimes U(1)\\
&\longrightarrow SU(4)\otimes SU(2)_L\otimes U(1)
\end{aligned}\tag{5.63}$$

などいろいろな分解の仕方，いい換えれば対称性を破る方法にいろいろの道筋がある．第1の道筋では，$SU(5)$ を経過するので，これまで $SU(5)$ について議論したことはそのまま成立する．第2の道筋のように，分解の仕方によっては $SU(2)_L\otimes SU(2)_R\otimes U(1)$ を通るので，左右の対称性つまりパリティの保存が高エネルギーで回復する可能性がある．

$SO(10)$ の利点の第 2 は，16 次元のスピノール表現を含むことである．この 16 次元表現を，$SU(5)\times U(1)$ または $SU(2)_L\times SU(2)_R\times SU(4)_C$ で分解してみると，

$$\mathbf{16}[SO(10)]=\mathbf{10}\oplus\mathbf{5}^*\oplus\mathbf{1} \qquad [SU(5)\times U(1)] \tag{5.64 a}$$

$$=(2,1,4)\oplus(1,2,4^*) \qquad [SU(2)_R\times SU(2)_L\times SU(4)_C] \tag{5.64 b}$$

と 2 通りに分解できる．これを表の形で示せば表 5.2 となり，既知の 15 個のフェルミオンに，未知の右巻きニュートリノ $\nu_L{}^c$ を加えて一つの表現の中におさめることができる．

第 3 の利点は，この $\nu_L{}^c$ をシーソーメカニズムのパートナーと考えて，ニュートリノの質量問題に解答を与える可能性があることである．

第 4 の利点は $SU(5)$ と違い，ビッグバン大統一期に $SO(10)$ によって発生させたバリオン数非対称が，電弱相互作用相転移を経ても生き残る可能性があることである（後述§ 6.5）．

表 5.2　$SO(10)$ の 16 次元表現の $SU(5)$ 分解と $SU(2)_L\times SU(2)_R$ 分解

ν_L	$d_R{}^c$	$d_G{}^c$	$d_B{}^c$	u_R	u_G	u_B	e^+
e^-	$u_R{}^c$	$u_G{}^c$	$u_B{}^c$	d_R	d_G	d_B	$\nu^c{}_L$

$\mathbf{16}|_{SO(10)}=\mathbf{5}^*\oplus\mathbf{10}\oplus\mathbf{1}|SU(5)$

ν_L	u_R	u_G	u_B	$SU(2)_L$
e^-	d_R	d_G	d_B	
e^+	$d_R{}^c$	$d_G{}^c$	$d_B{}^c$	$SU(2)_R$
$\nu_L{}^c$	$u_R{}^c$	$u_G{}^c$	$u_B{}^c$	

$SU(4)_C$

このように $SO(10)$ は，いろいろ魅力ある利点をもつので，大統一理論を問題にするときは常に取り上げられるモデルである．

$SO(10)$ は，道筋によっては対称性の破れる段階が $SU(5)$ に比べて一つ増えるので，対称性を破るエネルギースケールとして，$\mu_1<\mu_2\fallingdotseq M_{GUT}$ と 2 通り以上選べるので調整能力が増加する．例えば，ワインバーグ角や陽子崩壊率を実験と矛盾しないように合わせることが可能である．

5.3.2　新しい中性ゲージボソン：Z' [13)]

大統一の群 G が，$SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 以外の部分群を含めば，それに付随するゲージボソンと相互作用が存在する．例えば，左右対称モデルは

$SU_R(2)$ を含むので，ゲージボソン $W_R{}^{\pm}$, Z_R をもつ．現象的には，香りの変わる中性カレントデータ（$K^0-\overline{K}^0$ 混合など）から，右巻きゲージボソンの質量は左巻きボソンに比べて数倍以上大きくなければならないことはすでに議論した．たいていの G は，標準理論の $U(1)_Y$ のほかに余分の $U(1)$ を含むので（以下 $U(1)_E$ と書く．E=EXTRA），γ, Z のほかに新しい中性ボソンが存在する．このとき中性カレント相互作用は次のように書ける．

$$-\mathcal{L}_{NC}=eJ_{EM}{}^{\mu}A_{\mu}+g_Z J_{Z1}{}^{\mu}Z_{1\mu}{}^0+g_E J_{Z2}{}^{\mu}Z_{2\mu}{}^0 \tag{5.65}$$

ただし，Z_1^0, $J_{Z1}{}^{\mu}$ は，標準モデルにおける Z，中性カレントを表し，

$$g_Z=g_W/\cos\hat{\theta}_W=e/\sin\hat{\theta}_W\cos\hat{\theta}_W \tag{5.66 a}$$

$$J_{Z1}{}^{\mu}=\sum_f \bar{f}\gamma^{\mu}\left\{\varepsilon_{L1}{}^0(f)\frac{1-\gamma^5}{2}+\varepsilon_{R1}{}^0(f)\frac{1+\gamma^5}{2}\right\}f \tag{5.66 b}$$

$$\varepsilon_{L1}{}^0(f)=I_{3f}-Q_f\sin^2\hat{\theta}_W, \qquad \varepsilon_{R1}{}^0(f)=-Q_f\sin^2\hat{\theta}_W \tag{5.66 c}$$

と書ける．(5.65) の第 3 項が新しい中性ボソンに伴う新しい相互作用を表す．$Z_2{}^0$ に結合する中性カレントは

$$\begin{aligned}J_{Z2}{}^{\mu}&=\sum_f \bar{f}\gamma^{\mu}\left(\varepsilon_{L2}{}^0(f)\frac{1-\gamma^5}{2}+\varepsilon_{R2}{}^0(f)\frac{1+\gamma^5}{2}\right)f\\&=\sum_f[(Y(f)\,\bar{f}_L\gamma^{\mu}f_L+Y(f^c)\overline{f_L{}^c}\gamma^{\mu}f_L{}^c)]\end{aligned} \tag{5.66 d}$$

$$\varepsilon_{L2}{}^0(f)=Y(f_L), \qquad \varepsilon_{R2}{}^0(f)=-Y(f_L{}^c) \tag{5.66 e}$$

のように書ける．最後の式を導くのに，$\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\psi_R=-\overline{(\psi^c)_L}\,\gamma^{\mu}(\psi^c)_L$ を使った．$Y(f_L)$, $Y(f_L{}^c)$ は，左巻きフェルミオン f_L, $f_L{}^c$ のもつ（群 $U(1)_E$ に付随する）超電荷である．

$Z_1{}^0, Z_2{}^0$ は同じフェルミオン対に結合するので混合が起こり，その結果，物理的な質量固有状態 Z_1, Z_2 は次のように表される．

$$Z_1=Z_1{}^0\cos\theta_E+Z_2{}^0\sin\theta_E \tag{5.67 a}$$

$$Z_2=-Z_1{}^0\sin\theta_E+Z_2{}^0\cos\theta_E \tag{5.67 b}$$

このとき，現在観測されている Z^0 は Z_1 と解釈する．Z_2 はしばしば Z' とも書く．対応する質量行列は

$$\widetilde{M}=\begin{bmatrix}M_0{}^2 & \delta M^2\\ \delta M^2 & M_E{}^2\end{bmatrix}, \qquad M_0=\frac{m_W}{\cos\hat{\theta}_W} \tag{5.68}$$

M_0, M_E は混合がないときの $Z_1{}^0, Z_2{}^0$ の質量である．Z_1, Z_2 の質量を M_1, M_2 と

し，混合角，非対角行列要素を質量で表すと

$$\tan^2\theta_E = \frac{M_0^2 - M_1^2}{M_2^2 - M_0^2} \tag{5.69 a}$$

$$\delta M^2 = \sqrt{(M_2^2 - M_0^2)(M_0^2 - M_1^2)} \tag{5.69 b}$$

のように書ける．これらの式から，新しいボソンの顕著な影響は次の三つに現れる．

(1) 既知の Z ボソンの結合定数が変わる．

(2) 既知の Z ボソンの質量が小さくなる．

(3) 新しいボソン Z' の交換項が加わる．

Z_1, Z_2 のフェルミオン f_L との結合定数は

$$g_Z\varepsilon_{L1}(f) = g_Z\varepsilon_{L1}{}^0(f)\cos\theta_E + g_E\varepsilon_{L2}{}^0(f)\sin\theta_E \tag{5.70 a}$$

$$g_E\varepsilon_{L2}(f) = -g_Z\varepsilon_{L1}{}^0(f)\sin\theta_E + g_E\varepsilon_{L2}{}^0(f)\cos\theta_E \tag{5.70 b}$$

で与えられ，f_R との結合定数は上式を $L\to R$ として得られる．標準理論の実験データ再現性は非常に良いので，$M_1 = M_0 - \delta$, $\delta \ll M_1 \fallingdotseq M_0 \ll M_2$ と考えられるから

$$\theta_E \fallingdotseq O\left(\frac{\sqrt{2M_0\delta}}{M_2}\right), \qquad \delta M^2 \fallingdotseq M_2^2\cdot\theta_E \tag{5.71}$$

となり，既知の Z の結合定数，質量に対する補正はわずかである．

結合定数 g_E は，対象とする大統一群 G の種類によって変わる量である．一般的な考察をするにはパラメターが多すぎるので，通常は特定のモデルについて考慮する．G の例としてよく使われるのは，超紐の理論の低エネルギー極限として出現する E_6 で，対称性の破れ方によっては，

$$E_6 \longrightarrow SO(10)\times U(1)_\phi \longrightarrow SU(5)\times U(1)_\chi\times U(1)_\phi \longrightarrow SU(3)\times SU(2)_L \times U(1)_Y\times U(1)_\chi\times U(1)_\phi \longrightarrow SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)_Y\times U(1)_\eta \tag{5.72 a}$$

のように，種々の中性ゲージボソン，Z_ϕ, Z_χ, Z_η が現れる．

$$E_6 \longrightarrow G'\times U(1)_\beta, \qquad G'\supset SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)_Y \tag{5.72 b}$$

と書けば，

$$Z_2{}^0 = Z_\beta \equiv \cos\beta\, Z_\chi + \sin\beta\, Z_\phi \tag{5.73}$$

のようにまとめることができる．Z_β の結合するフェルミオン（E_6 の 27 次元

表現に属する）は超電荷 Y_β((5.66) の Y) をもつ．Z_χ, Z_ψ, Z_η は，それぞれ $\beta=0,\ \pi/2,\ -Z_\eta=Z(\beta=\pi-\tan^{-1}\sqrt{5/3})$ に対応する．このとき，

$$g_E/g_Z=\sqrt{5/3}\lambda\sin\hat{\theta}_W \tag{5.74}$$

と書き表すことができる．λ はモデル（対称性の破り方）やエネルギースケール μ により変わる量である．大統一スケールでは $\tan\hat{\theta}_W=\sqrt{3/5}$ であるので，$\lambda=1$ とおけば，g_E は g_W に等しい．表5.3に，E_6 群の27次元表現に属する左巻きフェルミオンの，$SO(10)$, $SU(5)$ による分類と，おのおのの場合の超電荷を与える[13]．

表 5.3　E_6 から分解した各種モデルでのフェルミオンの超電荷

$SO(10)$	$SU(5)$	$\sqrt{24}\,Y_\psi$	$2\sqrt{10}\,Y_\chi$	$2\sqrt{15}\,Y_\eta$
16	$10(u, d, \bar{u}, e^+)_L$	1	−1	−2
	$5^*(\bar{d}, \nu, e^-)_L$	1	3	1
	1　$\bar{N}_L$	1	−5	−5
10	$5(D, \bar{E}^0, E^+)_L$	−2	2	4
	$5^*(\bar{D}, E^0, E^-)_L$	−2	−2	1
1	1　$S_L{}^0$	4	0	−5

$Z'(=Z_2)$ 交換項を考慮に入れると，$e^-e^+\to l\bar{l}$, $e^-e^+\to$ ハドロンでは，標準理論に比べて，R_{ll} を減少させ R を押し上げる効果がある*4)．この事実に着目し，世界の e^-e^+ コライダーの精密データを使って間接的に Z' を探す試みが行われ，下限値 ($m_{Z'}>779$ GeV) を得た[14]．ここでは，ハドロンコライダーによる Z' の直接生成の試みについて簡単にふれる[15]．E_6 モデルを使う場合は，Z' 生成の断面積は θ_E と $m_{Z'}$ をパラメターとして計算することができる（ただし m_H などは適当に仮定する）．検出信号は，$Z'\to e\bar{e}$, $\mu\bar{\mu}$ で，Z' が存在すれば不変質量 $m(l\bar{l})$ の $m_{Z'}$ に対応するところに共鳴の山が現れることを使う．図5.6 (a) に，ハドロンコライダーで，もし Z' が存在すればどのように見えるかという想定図を示す．現時点での試みは，テヴァトロン ($\sqrt{s}=1.8$ TeV) を使って行われている．CDFグループは，全ルミノシティ $\int Ldt\sim110\ \mathrm{pb}^{-1}$ のデータ中には，$m(l\bar{l})$ の山が存在しなかったことから，$\sigma(p\bar{p}\to$

---

*4)　$R_{ll}=\dfrac{\sigma(e^-e^+\to l^-l^+)}{\sigma(e^-e^+\to\mu^-\mu^+)}$,　　$R=\dfrac{\sigma(e^-e^+\to \text{ハドロン})}{\sigma(e^-e^+\to\mu^-\mu^+)}$

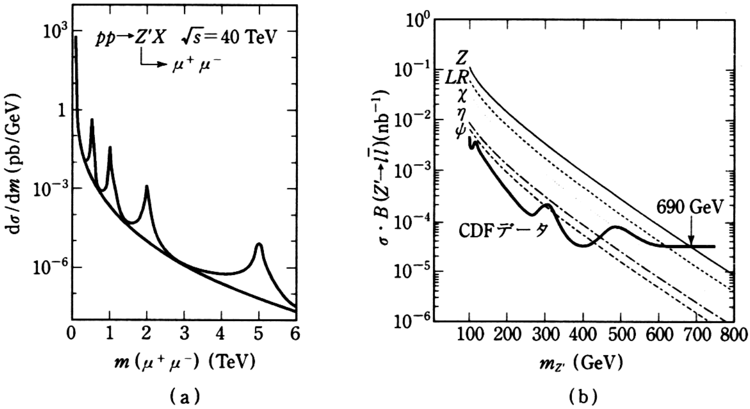


図 5.6 (a) 大型ハドロンコライダーで，$\sqrt{s}=40$ TeV，$10^4\,\mathrm{Pb}^{-1}$ のルミノシティとしたときの Z' 生成信号シミュレーション．理論は $Sp(6)\times U(1)$ で，$m_Z'=0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ TeV のとき，$m(\mu^+\mu^-)$ に山が見える．

(b) テヴァトロン ($\sqrt{s}=1.8$ TeV)，$\int L\mathrm{d}t\simeq 110\,\mathrm{pb}^{-1}$ の CDF データ[15]．Z' 生成$\times Z'\to(e\bar{e}+\mu\bar{\mu})$ 崩壊の 95%上限値．Z, LR, χ, η, ψ は，$\lambda=1$，左右対称モデル，E_6 の χ, η, ψ モデルの生成断面積×崩壊分岐比の値[16]．CDF はこれより，$m_Z'>690$ GeV としている．

$Z')\cdot BR(Z'\to l\bar{l})\lesssim 0.04\,\mathrm{pb}^{-1}$ を得た．これから，各種の Z' の質量上限値が得られるが (図 5.6 (b))[15,16]，実験グループは，Z' の結合定数を標準理論と同じ ($g_E=g_W$) とおいたときの質量上限値を与えている．このときは，

$$m_Z'>690\,\mathrm{GeV} \tag{5.75 a}$$

となる．$W^{\pm\prime}\to e\nu$, $\mu\nu$ の $\sigma\cdot BR$ についても同様な値

$$m_W'>720\,\mathrm{GeV} \tag{5.75 b}$$

を得ている．

5.4 階 層 問 題

大統一理論には，$\langle\Phi\rangle\simeq O(10^{15})$GeV と $\langle H\rangle\simeq O(100)$GeV の二つのエネルギースケールが存在する．比は $\langle H\rangle/\langle\Phi\rangle\simeq 10^{-13}$ であるから，非常にスケールの違う現象を同一理論の枠内で処理する必要がある．これが階層問題である．なぜこのように大きな階層が存在するかという本質的な原理については答えら

れていないが，階層に付随する技術的な問題として微調整問題 (fine tuning problem) がある．ヒッグスの質量を考えてみよう．標準理論のトリー近似では

$$m_{H_0}{}^2 = -2\mu^2 = 4\lambda\langle H\rangle^2$$

で与えられるが，放射補正（図 5.7 (a)~(c) のループ図）の寄与は，

$$\delta m_H{}^2 \sim \text{const.}\times g^2\Lambda^2 \tag{5.76}$$

のように切断パラメター Λ の 2 次に比例する．フェルミオンやゲージボソンの質量に対しては，カイラル対称性やゲージ対称性があるおかげで発散をせいぜい $\ln\Lambda$ 程度に抑えられるので，2 次発散はスカラー粒子に特有の現象である．大統一理論では H と Φ との相互作用（例えば，$\mathcal{L}_{\mathrm{INT}}\sim\Phi^2H^2$）[*5)] が存在するので，ヒッグスの質量補正には Φ のループも寄与するが，このときは，$\Lambda^2\sim m^2(\Phi)\sim 10^{30}\,\mathrm{GeV}^2$ となる．ヒッグスの質量は $m_H{}^2 \fallingdotseq v^2 \fallingdotseq (250\,\mathrm{GeV})^2$ であるから，この寄与を相殺するメカニズムは 26 桁の精度の微調整を必要とする．しかも，この微調整を摂動の各次で行わなければならない．これは大変不自然な論理である．この微調整問題は大統一理論であれば必ず直面する問題であって，モデルの如何に関わらない本質的な問題である．この微調整問題を避けるには大きくいって 2 通りの方法がある．

第 1 は，そもそもはじめから素粒子としてのスカラー粒子は存在しないとする立場である．ヒッグス機構が範とした超伝導現象ではヒッグス粒子は電子のクーパー対であった．この類推で，ヒッグス粒子はフェルミオン対の束縛状態と見なす立場が成り立つ．複合粒子の場合は，Λ が束縛エネルギーのスケールを越えると，構成フェルミオンを束縛状態から開放して自由粒子にしようとする力が強くなる．"形状因子 $F(\Lambda^2)$ による抑圧因子が働いて発散を防ぐ" といういい方をすることもできる．このフェルミオンを既知の粒子の中に求めるとトップクォーク縮退モデルとなるが[17)]，新種のフェルミオンとする方が新しい可能性を引き出せる．これの典型的例が§3.5で議論したテクニカラー理論である．テクニカラー理論はあらゆる現象をQCDとの類推で解決しようと試

*5) この種の相互作用は，もともとのラグランジアンに存在しなくても，放射補正を入れると現れる．X, Y は Φ, H 双方に結合できるので，X もしくは Y を 2 個交換することにより実効的に存在する．

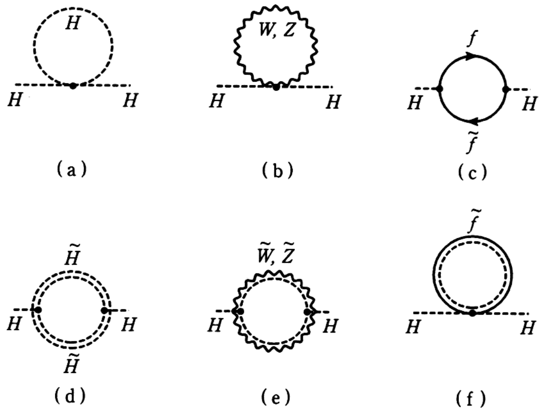


図 5.7 ヒッグス質量の放射補正項
標準モデルによる 2 次発散の補正項 (a)~(c) は，超粒子パートナー (d), (e) などによりキャンセルされる．

みる．QCD では，クォーク対にカラー力が働いてできる束縛状態の凝縮によりカイラル対称性が破れる．すなわち，σ メソンと呼ばれるフェルミオン対が対称性を破るヒッグスメソンの役割を果たす．テクニ QCD では，テクニフェルミオン対がテクニカラー相互作用により“テクニ π”メソンをつくる．このテクニ π が標準理論のヒッグス粒子の役割を果たすと考えるのである．ヒッグスの真空期待値 v (=250 GeV) と，σ モデルの真空期待値 $f_\pi/\sqrt{2}$ ($f_\pi=\pi$ の崩壊定数=132 MeV) が対応するので，テクニ QCD は通常の QCD を $\sim v/f_\pi \fallingdotseq 1000$ の因子分だけエネルギーをスケールアップしたものと考えればよい．したがって，QCD の共鳴群 ($\rho, \omega\cdots$) に対応してテクニ共鳴群（テクニ ρ，テクニ $\omega\cdots$）の存在が予言されるなど，非常に豊富な内容をもつ．この考え方は非常に魅力的であるが，今までのところすべての現象を矛盾なく説明するモデル建設に成功していない[18]．しかし，モデル構築はできていなくても，背後にある基本的な考え方が有効である可能性は十分ある．

第 2 の考え方は，ループの発散を個々に潰してしまう方法である．フェルミオンループによる放射補正は，フェルミ統計のおかげでボソンループと逆符号の寄与を与えるので，もし質量と結合定数が同じフェルミオンが存在するなら

ば，ボソンによる寄与を相殺することができる (図 5.7 (d)〜(f))．すなわちフェルミオン-ボソン入れ替えの対称性 (超対称性：super symmetry) が存在すればよい．結合定数が同じであれば，対を組むフェルミオンの質量が多少異なっても，

$$\delta m_H{}^2 \sim cg^2(\Lambda^2 + O(m_B{}^2)) - cg^2(\Lambda^2 + O(m_F{}^2))$$
$$\sim cg^2 O(m_B{}^2 - m_F{}^2) \tag{5.77}$$

と抑えられるので (O はオーダーの意味)，質量差が大体 $\lesssim$1TeV 程度に納まっていれば，観測現象とは矛盾せずに微調整問題を解決できる．

この手法が人工的に過ぎると懸念を抱く人には，こうした手法が歴史的にははじめてではないことを指摘しておこう．香りを保存しない中性カレント効果を抑圧するために，チャームクォークを導入して u クォークの寄与を相殺させた GIM 機構を思い出してみるがよい．質量が同じであれば相殺は完全なはずであるが，相殺が完全でない部分を現象と合わせるために調整したチャームクォークの質量は大体予想通りのところに存在したのである．

5.5 超 対 称 性

5.5.1 超対称性とは

超対称性 (super symmetry : SUSY) は今までにでてきたどの対称性とも異なる．時空対称の演算子としてわれわれが知っているものは，平行移動を起こす運動量 P^μ，回転やローレンツブーストを起こす $M^{\mu\nu}$ で，これらはローレンツベクトルないしはテンソルである．アイソスピンなどの内部対称演算子はローレンツスカラーである．これらの演算子は場の量で書けるが，場にテンソル場とスピノール場があることを考えれば，スピノール量の演算子があってもよい．超対称演算子 $Q_{\alpha i}$ は正にそのような量である．ここで，α はスピノール指標を示し，i は内部自由度 ($1 \leqq i \leqq N$) を表す．したがってボソン状態 $|B\rangle$ に演算すれば，それはスピノールとして変換するからフェルミオン場となる．すなわち，

$$Q_{\alpha i}|B\rangle \sim |F\rangle \tag{5.78}$$

したがって，超対称演算はボソンとフェルミオンを入れ替える演算となる．

$Q_{\alpha i}$ は，反交換関係を満たすから，生成演算子の従うリー代数を反交換関係を含むように拡張しなければならない．こうした演算には，通常の掛算や積分と違う規則に従う“超空間内における超変数”の代数を扱うので，詳しくは専門書[19]を見てもらうこととし，ここでは，超対称性理論の結果としてでてくる一般的な規則や，その現象論に対する効果を推定するに止める．

簡単のため，超対称演算子としてスピン 1/2 のスピノール Q_α を考察することにする．内部自由度 $N=1$ とし指標 i は省略すると，Q_α の従う交換関係は[19],

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}]=i\left(\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}Q\right)_\alpha \tag{5.79 a}$$

$$[Q_\alpha, P^\mu]=0 \tag{5.79 b}$$

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\}=-2(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}P^\mu \tag{5.79 c}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}=\{\overline{Q}_\alpha, \overline{Q}_\beta\}=0 \tag{5.79 d}$$

で与えられる．ただし，$\sigma^{\mu\nu}=(1/2i)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $\overline{Q}=Q^\dagger\gamma^0$ である．第 1 行は，Q_α がスピノールとして変換することを示し，第 2 行はこの“スピノール荷 Q_α”が保存量であることを示す．このことは Q_α が，$m^2=P_\mu P^\mu$ とも交換することを意味するから，Q_α の演算は質量を変えない．すなわち，同じ超対称多重項に属するフェルミオンとボソンの質量は同じでなければならない．第 3 行は，Q を 2 回演算すると運動量すなわち時空での座標移動演算子となることを示す．Q を 2 回演算すると座標移動の演算になるということは，比喩的にいうならば，ディラック方程式がクライン-ゴルドン方程式の因数分解と解釈できたように，Q は運動量演算子の因数分解であると解釈できる．このように，超対称演算は時空座標の演算を含むので，超対称変換を局所化（ゲージ化）すれば一般座標変換となる．このことは超対称性の中には重力が内在することを意味する．したがって，超対称ゲージ理論は重力を含む統一理論の候補である (super-gravity 理論＝SUGRA)．重力との結合は低エネルギーでは弱く無視して差し支えないので，現象論的には，重力のみを他から切り離して大域的な対称性として扱う大域超対称理論と超重力理論とはほとんど区別できないが，モデル建設には SUGRA を指針とすることが多い．

超対称性理論は，実験的には証拠が皆無にもかかわらず，物理学者が魅力的

と考える最大の理由は，場の理論に固有の無限大の発散を著しく軽減できること，場合によっては繰り込みをせずに回避できる可能性があることによる．繰り込み可能性という道標がわれわれを統一理論に導いてくれた歴史的教訓に学ぼうとしているわけである．発散が軽減するかもしれないという一つのヒントは，次のような考察よりくる．繰り込みの処方では，場の理論に特有の真空の無限大は，観測量には現れないからという理由で引き算をして，無限大ははじめからなかったようなふりをする．しかし，ボソンは無限個の調和振動子の零点振動に起因して真空に正の無限大のエネルギーをもたらすが，フェルミオンは無限個の負のエネルギー粒子の詰まったディラックの海に起因して真空に負の無限大のエネルギーをもたらすことに注意しよう．ボソンとフェルミオンの間にきちんとした対称性があると，これらの発散は逆符号であることから，発散が相殺することが予想されるのである．

超対称性の存在は，ボソンとフェルミオンが別個の粒子ではなく，一つの粒子の異なる量子状態と考えねばならぬことを意味する．超対称性が自然界で実現しているならば，

(1)　既存のボソンには超対称性フェルミオンが，フェルミオンには超対称性ボソンが対となって存在していなければならない．以下，これらの超対称性粒子を超粒子もしくは SUSY 粒子ということにする．

(2)　超対称性が成立しているならば，粒子とその超粒子は同一多重項に属し，同一の質量をもたねばならない．

(3)　超粒子は，既存の粒子と対となって一つの表現をつくるから，超粒子の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ に関する量子数は，対となる既存の粒子とまったく同じであり，かつ結合定数もまた同じである．

以上の条件は，大統一における微調整問題を解決する要因であった．現実には質量の縮退したボソン・フェルミオンの対は存在しないから超対称性は破れていなければならない．しかし，破れの度合いが小さく，超粒子との質量差が，$O(1\text{TeV})$ 以下ならば，微調整問題解決手段として依然有効である．局所超対称性が重力理論に結びつくことを考えると，超対称性の存在理由は，単なる微調整問題を越えて自然のもつ本質的な内在要素として追求するに値するであろう．以下，超対称性の結果として生じる規則や現象を考察して，新現象追

求への手がかりとしよう．

5.5.2 超粒子の性質

$Q_{\alpha i}{}^2=0$ であるので，$N=1$ の場合は，ヘリシティが1/2違う粒子状態のみで表現は閉じる．ただし，ヘリシティ $(h,\ h+1/2)$ のペアがあれば，CPT不変性により $(-h,\ -h-1/2)$ のペアも存在しなければならない．$N=2$ ならば，$Q_{\alpha 1}Q_{\alpha 2}\neq 0$ であるので，ヘリシティが1/2および1違う粒子を同一多重項内に含みうる．重力のゲージ粒子グラビトンの存在を仮定すれば，基本粒子のスピンは，0から最高2までなければならない．このとき，ヘリシティ状態 $h(-2\leqq h\leqq 2)$ をすべて同一多重項におさめるには $N=8$ が必要となる．ここでの議論としては，$N=1$ とし超対称性の現象的性質を理解するにとどめる．この場合スピン1/2の物質場とその仲間（カイラル多重項，スピン(0, 1/2)），ゲージボソンとその仲間（ゲージ多重項，(1, 1/2)），ヒッグスとその仲間（(1/2, 0)，カイラル多重項の一つ），グラヴィトンとその仲間グラヴィティーノ(2, 3/2) が存在する．例として標準理論に超対称性を必要最小限に取り入れて拡張した場合（最小限の超対称標準理論＝minimal super-symmetric standard model, 略して MSSM）の超粒子種を表5.4に示す．

この表に関しては，いくつか注釈が必要である．

(1) スピン1/2のフェルミオンの左巻きと右巻きの2種類の状態に対応して，それぞれ独立なスカラー超粒子が存在し（$\tilde{q}_L$ と $\tilde{q}_R$，$\tilde{l}_L$ と $\tilde{l}_R$），一般には質量も異なる．$N=1$ の超対称性ではヘリシティが1異なる粒子は同一多重項には入れないことによる．

(2) 標準理論ではヒッグス粒子は2重項が一つと仮定する．しかし，超対称性を要求すると最低2個のヒッグス2重項が必要となる．質量項を発生する湯川相互作用ラグランジアンは（(2.2) 参照），

$$-\mathscr{L}_{\rm higgs}=(\sqrt{2}m_d/v_1)(\overline{\Psi}_L H_1)d_R+(\sqrt{2}m_e/v_1)(\bar{e}_L H_1)e_R$$
$$+(\sqrt{2}m_u/v_2)(\overline{\Psi}_L H_2)u_R+{\rm h.c.} \qquad (5.80\,{\rm a})$$

$$H_1=\begin{bmatrix}H_1{}^+\\ H_1{}^0\end{bmatrix},\qquad H_2=\begin{bmatrix}H_2{}^0\\ H_2{}^-\end{bmatrix} \qquad (5.80\,{\rm b})$$

の形をしている．標準理論では，$H_2=H_1{}^c$（かつ $v_1/\sqrt{2}=\langle H_1{}^0\rangle=v_2/\sqrt{2}=$

表 5.4　現存粒子と超粒子の対照表

一般名称	粒子名	スピン	名　称	超粒子名	スピン	名　称
カ	q_L	1/2	quark	$\tilde{q}_L$	0	squark
イ	q_R	1/2	quark	$\tilde{q}_R$	0	squark
ラ	l_L	1/2	lepton	$\tilde{l}_L$	0	slepton
ル	l_R	1/2	lepton	$\tilde{l}_R$	0	slepton
多	H^0	0	higgs	$\widetilde{H}^0$	1/2	higgsino
重	h^0	0	higgs	$\tilde{h}^0$	1/2	higgsino
項	H^+	0	higgs	$\widetilde{H}^+$	1/2	higgsino
	H^-	0	higgs	$\widetilde{H}^-$	1/2	higgsino
ベ	g	1	gluon	$\tilde{g}$	1/2	gluino
ク多	γ	1	photon	$\tilde{\gamma}$	1/2	photino
ト重	Z^0	1		$\widetilde{Z}^0$	1/2	zino
ル項	$W^\pm$	1		$\widetilde{W}^\pm$	1/2	wino

$\langle H_2{}^0 \rangle$) であるが，超対称理論では，H_2 は $H_1{}^c$ であってはいけない．その理由は，ヒッグス H_1 に対応する超粒子 $\tilde{h}_1$ は決まったヘリシティをもつが，$H_1{}^c$ は H_1 のエルミート共役であるので，対応する $\tilde{h}_2$ は $\tilde{h}_1$ と異なるヘリシティをもつことによる．$N=1$ の超対称理論ではヘリシティの異なるフェルミオンは別の多重項に属するので，同じヒッグス H_1 を使うわけにはいかないのである．そこで，u クォークに質量を与えるための，超電荷 $Y=-1$ をもつヒッグス H_2 の 2 重項が必要となる．もう一つの理由は，2 重項が 2 個ないとヒッグシーノ（フェルミオン）がつくる三角異常項発生を防げないのである．こうして，超対称理論では 2 重項のヒッグスが少なくも 2 個存在しなければならないことがわかった．2 重項が 2 個あると 8 個の独立成分が存在する．3 個は $W^\pm$, Z^0 に質量を与えるために吸収されるが，残りの 5 個が物理的なヒッグス粒子 ($H^\pm, H^0, h^0, A^0$) として現れることはすでに述べた (§3.4 参照)．この 5 個のヒッグス粒子に対応して，超対称ヒッグス粒子（ヒグシーノ）もまた 5 種類 ($\widetilde{H}^\pm, \widetilde{H}^0, \tilde{h}^0, \widetilde{A}^0$) 存在する．超対称性が破れると，$\widetilde{W}^\pm$ と $\widetilde{H}^\pm$ が，また $\tilde{\gamma}$, $\widetilde{Z}^\circ$, $\widetilde{H}^0$, $\tilde{h}^0$ が混合するので，これらの混合粒子に対して，通常チャージーノ (chargino, $\tilde{\chi}^\pm$) およびニュートラリーノ (neutrarino, $\tilde{\chi}_1{}^0$, $\tilde{\chi}_2{}^0$, …) という名称を与える．

(3)　超対称性が破れることに伴い，ゴールドストーン粒子が発生する．超

対称演算子はスピン 1/2 であるので，この粒子はスピン 1/2 をもちゴールドスティーノ (goldstino) と呼ばれる．超対称性が大域対称性であるならば，これは質量 0 をもつ物理的な粒子であるが，超重力理論では，スピン 3/2 のグラビティーノに質量を与えるために吸収されるので，この表には載せていない．

(4) 超粒子のもつ量子数は，対称群 $SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)$ に関しては，対を組む粒子とまったく同じ量子数をもつ．このことから既知の粒子の仲間同士で，超対称多重項を形成することは不可能なことがわかる．例えば，q_L, q_R, l_L, l_R はスピンだけからは，ゲージボソンの超対称パートナーである可能性はあるが，グルーオンの QCD での量子数（カラー8 重項），$W^\pm, Z, \gamma$ の $SU(2)\times U(1)$ での量子数を見れば，いずれも超粒子パートナーではありえない．さらに，ヒッグスは $SU(2)$ の仲間であるが，レプトンもしくはクォークはヒッグシーノではありえない．なぜなら，このとき，ヒッグスはレプトンもしくはクォーク数をもつが，ヒッグスが真空期待値をもつことによって，これらの数が保存しなくなるので，観測現象と矛盾を生じてしまうのである．かくして，超粒子は既存の粒子以外にその候補を見つけねばならず，超対称性を要求することによって素粒子の数は倍増する．

(5) MSSM を含むたいていの超対称性モデルで，R パリティが保存する．R パリティは

$$R=(-1)^{2S+3B-L} \tag{5.81}$$

で定義される．ただし，S はスピン，B, L はそれぞれクォーク数，レプトン数である．既知の粒子の R はすべて正であり，超粒子の R はすべて負である．この結果，超粒子は必ず対生成されること，最も軽い超粒子 (LSP: lightest super particle) は安定であることがわかる．宇宙論の制限から，電荷もしくはカラーをもつ未知の安定な粒子の存在する余地はないので，LSP は中性粒子，すなわち $\tilde{\nu}, \tilde{\gamma}, \tilde{h}^0, \tilde{H}^0$ のどれかということになる．通常は $\tilde{\gamma}$ にとる．ただし，$\tilde{\gamma}, \tilde{Z}^0$，2 個の中性ヒグシーノ ($\tilde{H}^0$, $\tilde{h}^0$) は，混合して質量固有状態ニュートラリーノ ($\tilde{\chi}_i{}^0; i=1\sim4$) をつくるので，$\tilde{\gamma}$ とか $\tilde{Z}^0$ といった区別はあまり意味がない．一番軽いニュートラリーノ ($\tilde{\chi}_1{}^0$) が LSP の最有力候補である．

5.5.3　超対称大統一理論 (SUSY-GUT)

ゲージ階層の微調整問題はすべての大統一理論に共通の欠点であったが，超対称性を組み込むことにより消滅することはすでに述べたとおりである．大統一に超対称性を組み込んだ理論は，観測されている粒子スペクトルに関する限り MSSM とほとんど同じである．しかし，大統一理論の階層問題を解決するのみならず，先に述べた $SU(5)$ の現象論的な欠点（他の大統一理論も多かれ少なかれもつ）を，無理なく修復してしまうという点で魅力的である．

a．ワインバーグ角

超対称性は破れているにせよ，エネルギースケールが，$\sim$1TeV を超えるあたりで回復するとするのが自然な考えであることは，ヒッグス粒子の質量の議論から導かれた．超粒子の質量が $\lesssim$1TeV であるならば，エネルギースケールがそれより大きなところ ($\mu > M_{\rm SUSY} \sim$1TeV) での放射補正には，超粒子の寄与を考慮しなければならない．したがって，$SU(5)$ のところで議論した各種ゲージ群の放射補正に対する β 関数 (5.52) は次のように補正される[20]．

$$\beta_3 = \frac{1}{3}[(33-4n_g)-(6+2n_g)] \tag{5.82 a}$$

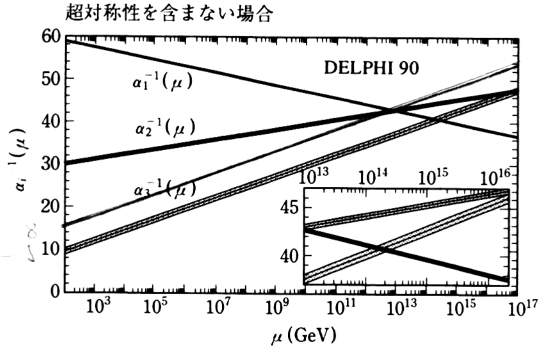
$$\beta_2 = \frac{1}{3}\left[\left(22-4n_g-\frac{1}{2}\right)-\left(4+2n_g+\frac{5}{2}\right)\right] \tag{5.82 b}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3}\left[\left(-4n_g-\frac{3}{10}\right)-\left(2n_g+\frac{3}{2}\right)\right] \tag{5.82 c}$$

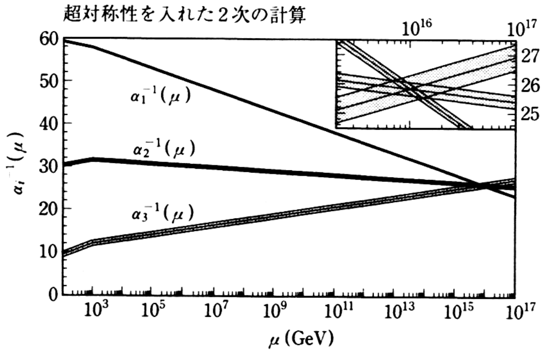
括弧内の第 1 項は，既述した $SU(5)$ の β 関数で，第 2 項が超粒子の寄与を示す．n_g は世代の数（3 とする）を示す．超粒子の寄与は，減衰関数である α_3, α_2 の勾配を小さくするので，α_i の一致する大統一点 (M_{ss}) を大きくし，$M_{ss} \sim 2\times10^{16}$ GeV とする．アマルディ (Amaldi) などは 2 次のループ補正をも考慮した式を使い，LEP の精密データを解析した結果[20]，通常の $SU(5)$ では 3 個の α_i が一致する点はないが，SUSY を取り入れた $SU(5)$ では発展方程式の傾斜が $\mu \gtrsim$1GeV で変わり，三者がきれいに 1 カ所で合流することを示した（図 5.8)．これにともなって，ワインバーグ角の発展の仕方も変更され[21]

$$\sin^2\hat{\theta}_W = \frac{3}{8} - \frac{15\alpha_{EM}(m_W)}{8\pi}\ln\left(\frac{M_{ss}}{m_W}\right) \simeq 0.23 \tag{5.83}$$

となり，実験値を再現することが可能となる．図5.9は，SUSYを入れない



(a)



(b)

図 5.8 $SU(i)$ 群結合定数の繰り込みスケール μ による発展図
出発点に LEP の DELPHI データ[16,20] を使用した.
(a) $SU(5)$ のみ
(b) $SU(5)$+SUSY, $M_{SUSY}=1$ TeV

$SU(5)$ 理論と SUSY を入れた $SU(5)$ 理論の $\alpha_s(m_Z{}^2)$ と $\sin^2\hat{\theta}_W(m_Z{}^2)$ の計算予想値を示したものである[16,20]. また, SUSY-GUT によれば, $\alpha_5(M_{ss})\simeq 1/25$ であり, 超対称性を使わない値 α_5 ($\simeq 0.025$) と異なる.

b. 陽子崩壊

大統一のエネルギースケールが大きくなることにともない陽子崩壊を媒介する X, Y 粒子の質量も大きくなる. その結果, SUSY を入れた陽子寿命 τ_{pss} は (以下 ss : SUSY, ns : non-SUSY の指標を使う), SUSY を入れない大統一の陽子寿命 τ_{pns} に比べて,

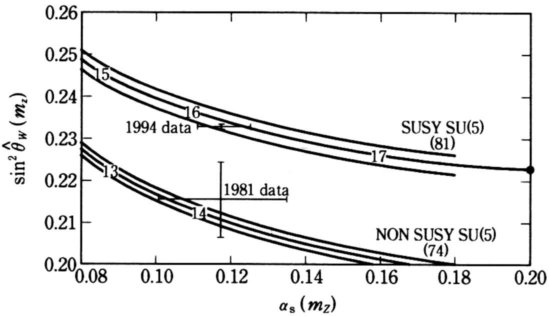


図 5.9　大統一理論による $\alpha_s(m_Z)$-$\sin^2\hat{\theta}_W(m_Z)$ の計算予想値

通常の $SU(5)$ と SUSY-$SU(5)$ の理論値を示す．3 本の線による帯は理論の不定性を表し，帯の中の数値は，エネルギースケール 10^n GeV の n を表す．古い 1981 年のデータでは通常の $SU(5)$ と合致したが，最近のデータは SUSY-$SU(5)$ に合う[16]．

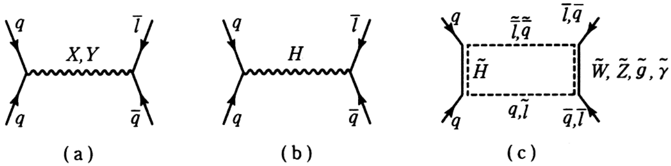


図 5.10　SUSY-$SU(5)$ による陽子崩壊過程

(a)　通常の $SU(5)$ 過程，　(b)　ヒッグス媒介過程

(c)　超粒子ループ中間状態による過程

$$\tau_{pss} \fallingdotseq \left(\frac{M_{Xss}}{M_{Xns}}\right)^4 \times \tau_{pns} \fallingdotseq 10^{38\pm 2}\ \text{年} \tag{5.84}$$

と長くなり，実験と矛盾しなくなる．これは観測不可能な値であるが，実は超対称モデルでは，X, Y の寄与による崩壊のほかにヒッグス粒子 H_{SU5}，ヒッグシーノ $\tilde{H}^0$ を仲介する過程がある（図5.10）．図5.10 (b) のヒッグス交換よる過程は，結合の大きさがフェルミオンの質量に比例し，H の質量に逆比例するという理由によって，m_H を $\sim 10^{11}$ GeV くらいまで小さくしないと検出可能な値にならないので，興味あるのは (c) の過程である．$\tilde{H}^0$ はフェルミオンであるので，振幅は X 交換の場合 $(\propto M_X{}^{-2})$ と違い $M(\tilde{H}^0)^{-1}$ に比例し，遷移確率がはるかに大きくなる．ただし，通常のヒッグスと同じく結合定数が質量に比例するので，これによる抑圧因子で相殺する．したがって，これらパラメターの不定性が大きく，正確な予想は困難であるが，パラメターを適当にと

れば，この過程が超対称大統一での優勢モードとなり，実験の観測範囲に入る可能性がある[22]．ヒグシーノが重い粒子に結合するので，崩壊モードは

$$p \longrightarrow K^+\nu \tag{5.85}$$

が優勢となる．超対称性を入れない大統一理論では，一般に，$\pi^0 e$, $\pi^+\nu$ が優勢であるので，もし崩壊が観測された場合，超対称性モデルかそうでないかは，崩壊モードによって区別がつけられる．

以上をまとめると，超対称性を取り入れた大統一理論はいまのところ実験と矛盾せず，理論的な利点を考えると大いに魅力のあるモデルであり，十分追求に値するという結論になる．

5.6 超対称モデル[19]

5.6.1 超粒子の相互作用

超対称性の破れが，対称性の自発的破れに基づくものならば，通常粒子と超粒子との質量の縮退は解けても，粒子間の相互作用の形や結合定数は変わらない．例えば，フェルミオン f とゲージボソン V との結合定数が g で指定されれば，f とスピン 1/2 のゲージーノ ($\tilde{V}$) とスフェルミオン ($\tilde{f}$) との結合は

$$\begin{aligned} g\bar{f}_a\gamma^\mu f_a V_\mu + \text{h.c.} &\longrightarrow \sqrt{2}g[(\bar{f}_a\tilde{V}_a)\tilde{f}_a + \text{h.c.}] \\ &\longrightarrow ig[(\partial^\mu\tilde{f}_a{}^*)\tilde{f}_a - \tilde{f}_a{}^*\partial^\mu\tilde{f}_a]V_\mu + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{5.86}$$

で与えられる．ここに，$f_a(\tilde{f}_a)=f_L(\tilde{f}_L)$, $f_L{}^c(\tilde{f}_R)$ である．$\tilde{f}_a$ は，スピン 0 のスカラー粒子であるが，f_L もしくは f_R の超対称伴侶としての $\tilde{f}_L$, $\tilde{f}_R$ の 2 種類が存在する．$\tilde{f}_L$ と $\tilde{f}_R$ は一般に混合するので質量固有状態ではない．しかし，混合率はフェルミオン f の質量に比例するので (後述 (5.100))，第 3 世代以外の混合は通常無視する．図 5.11 にいくつかの相互作用例を図示する．上記の議論で明らかなように，超対称性により規制される相互作用の形と強さは対称性が破れても変わらず，質量だけが変わるので，質量スペクトルがわかれば生成崩壊率が予言できることになる．

現象論的な制限：　質量スペクトルを得るためには具体的なモデルが必要となる．モデル構築に当たっては既知の現象と矛盾しないためいくつかの制限が

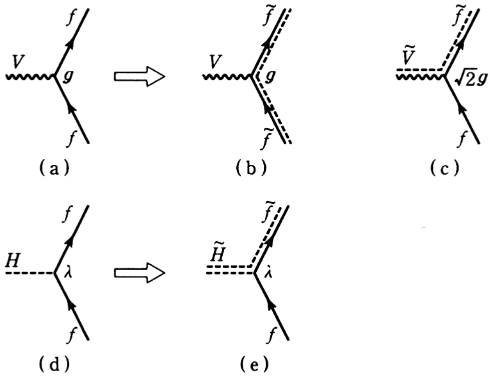


図 5.11　超粒子の相互作用の例
(a)　通常粒子 V（ゲージボソン）-ff（フェルミオン）の相互作用．点線をかぶせて 2 重線としたところが超粒子
(b)　V-$\tilde{f}$-$\tilde{f}$,　(c)　$\tilde{V}$-$\tilde{f}$-f
(d)　H-f-f,　(e)　$\tilde{H}$-$\tilde{f}$-f

つけられる．超粒子が存在すれば，既知の現象に対して中間状態として寄与しうる．例えば，香りの変わる中性カレント過程の反応率（$\mu \to e\gamma$, $K_L{}^0 \to \mu\bar{\mu}$ など），$K_L - K_S$ 質量差や CP 非保存パラメターに影響が及ぶ[23]．実験に矛盾しないためによく採用される処方箋は，質量スペクトルが香りに関してほぼ縮退しているという条件である．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{m}^2(\tilde{u}_a) \fallingdotseq \tilde{m}^2(\tilde{c}_a) \simeq \tilde{m}^2(\tilde{t}_a) \\
&\tilde{m}^2(\tilde{d}_a) \fallingdotseq \tilde{m}^2(\tilde{s}_a) \simeq \tilde{m}^2(\tilde{b}_a) \\
&\tilde{m}^2(\tilde{e}_a) \fallingdotseq \tilde{m}^2(\tilde{\mu}_a) \simeq \tilde{m}^2(\tilde{\tau}_a)
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

ここに $a=L$ もしくは R である．ただし，第 3 世代に関しては第 1，2 世代より条件が緩い．また，$\tilde{u}$ と $\tilde{d}$ については，左右カイラリティの質量がほぼ縮退していないと（$m(\tilde{u}_L) \fallingdotseq m(\tilde{u}_R)$，$\tilde{d}$ も同じ），原子遷移でのパリティ非保存成分が大きくなりすぎる．

5.6.2　最小 SUGRA モデル

a.　隠れた領域

超対称性を破る方法は種々ある．MSSM は現象論的制約と簡単さを指針として決めたが，MSSM のみではまだ制限が緩くパラメターが多すぎる（124

個！→文献 10 参照)．そのため SUGRA を指針としてパラメター数を減らすというのは魅力的な考え方である (SUGRA-GUT[24])．SUGRA では，重力の分化と繰り込み群方程式による発展が電弱相互作用をも規制するという見方をする．すなわち，重力を含む超大統一対称性（仮に G とする）の破れ（重力の分化）が，プランクエネルギーよりやや低いところ ($\sim M_X$) で発生したとしよう．この段階における各種粒子の質量と結合定数は，群 G により規制される共通の値をもつが，エネルギースケール $\mu < M_X$ では放射補正を受け，粒子ごとに異なる発展をする．特にヒッグス粒子の質量 $m_H{}^2$ は，電弱スケール $Q \sim O(G_F{}^{-1/2})$ では負となり，電弱相互作用の自発的破れが繰り込み群発展の帰結として自然に発生し，われわれの観測する相互作用を再現する．超対称性 G の破れが既存の（見えている）粒子群とは相互作用しない新領域（隠れた領域，hidden sector）にある粒子群のみで起こるとしよう．これらの粒子と見えている粒子とは重力相互作用でのみつながっているとすると，超対称性 G の破れの起きるエネルギースケールは $\sim M_X$ であっても，われわれに見える部分では重力結合の小ささによって，このエネルギースケールが実効的に $\sim O(M_X{}^2/M_{\text{Planck}}) \sim O(G_F{}^{-1/2})$ となる．このためには，$M_X \sim 10^{11}$ GeV ととればよい．この結果実現する実効的対称性は，GUT に大域超対称性（とその破れ）を入れたものにほとんど等しく，低エネルギーでは MSSM をほぼ実現する．以下は SUGRA でも最も簡単な仮定をする mSUGRA (minimal super gravity) に話をかぎる．実効ラグランジアンは，超対称性を保存する項と破る項に分けて次のように書ける．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\text{SUSY}) + \delta\mathcal{L} \tag{5.88 a}$$

$$\delta\mathcal{L} = m_0{}^2 \sum_{(i=\tilde{q},\,\tilde{l},\,H_{1,2})} |\phi_i|^2 + m_{1/2} \sum \bar{\lambda}_a \lambda_a + B\mu H_1 H_2 + A W_3 + \text{h.c.} \tag{5.88 b}$$

$\delta\mathcal{L}$ の第 1 項は，カイラル多重項のスカラー場（ヒッグス H_1, H_2 とスクォーク $\tilde{q}$，スレプトン $\tilde{l}$）の質量項，第 2 項は超対称フェルミオン（ゲージーノ）の質量項，第 3 項はヒッグス混合項，第 4 項はスカラー場の 3 次多項式ポテンシャル W_3 である．A, B は質量の次元をもつパラメターである．なお，ヒッグス質量項は超対称性保存項の中にも存在するのでその質量を μ と書く．m_0 はカイラルスカラーの，$m_{1/2}$ はゲージーノの共通質量で，

$$m^2(\tilde{q}) = m^2(\tilde{l}) = m_0{}^2 \tag{5.89 a}$$

$$M(\tilde{g})=M(\widetilde{W}^{\pm})=M(\widetilde{B})=m_{1/2} \tag{5.89 b}$$

である．$\delta\mathscr{L}$は，超対称多重項の一部にのみ他のメンバーとは異なる質量や結合を付加することにより超対称性を破る．破れのスケールはたかだか O(1 TeV) でなければならないから，$m_0, m_{1/2}, A, B$ もまた同程度である．上記の $\delta\mathscr{L}$ は，超対称性は破るが 2 次の発散は起こさないので，対称性を柔らかく破る項 (soft breaking term) と呼ばれている．MSSM では上記パラメターが各粒子ごとに異なる．

b.　電弱対称性の破れ

超対称性を破る項の中のヒッグスに関するパラメターは，式 (3.50) の超対称ヒッグスポテンシャルの $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2$ とは次のように関係づけられる．

$$\mu_1^2=m_0^2+\mu^2, \quad \mu_2^2=m_0^2+\mu^2, \quad \mu_3^2=-B\mu \tag{5.90}$$

上式は，$\mu_1^2=\mu_2^2>0$ で，自発的に対称性を破るための条件を満たしていない．しかし，これは，プランクスケール付近 ($Q\simeq M_X$) で成り立つ式である．放射補正効果を入れると，m_0, μ, $m_{1/2}$, A, B はすべて，$\tau=\ln(Q^2/M_X^2)$ の関数として粒子ごとに違う発展をする．そして低エネルギー ($Q\sim O(m_Z)$) では，電弱対称性の破れを正しく再現しなければならない．そのための必要条件はヒッグスの質量行列式が負になること ($\mu_1^2\mu_2^2-\mu_3^4<0$) とポテンシャルに下限値が存在すること ($\mu_1^2+\mu_2^2-2|\mu_3|^2>0$) である．具体的に超対称性ポテンシャル V (式 (3.50)) が極値をもつという条件 ($\partial V/\partial v_i$, $i=1, 2$) を書き下ろすと

$$\mu_1^2=\mu^2+m_{Hd}^2=\mu_3^2\tan\beta-\frac{m_Z^2}{2}\cos2\beta \tag{5.91 a}$$

$$\mu_2^2=\mu^2+m_{Hu}^2=\mu_3^2\cot\beta+\frac{m_Z^2}{2}\cos2\beta \tag{5.91 b}$$

$$\tan\beta=v_2/v_1=\langle H_u^0\rangle/\langle H_d^0\rangle \tag{5.91 c}$$

が得られるが，これらの式は上記の必要条件を満たす．m_{Hd}^2, m_{Hu}^2は，GUT スケールでの m_0^2 から，繰り込み群方程式により発展させたヒッグスの質量である．上式を使えば，μ^2 と $\mu_3^2=-B\mu$ は m_Z^2 と $\tan\beta$ で書き直せる．すなわち，mSUGRA では

$$(m_0,\quad m_{1/2},\quad A,\quad \tan\beta,\quad \mu\text{ の符号})$$

の五つのパラメターを指定すれば，すべての超粒子の質量 m_i^2 を放射補正に

よる発展結果として導くことができることを意味する．

$$\frac{\mathrm{d}m_i^2}{\mathrm{d}\tau}=\sum_j \beta_{ij} m_j^2(\tau) \tag{5.92}$$

上に述べたように，$SU(2)\times U(1)$ の自発的対称性の破れが起きるためには，ヒッグスの質量のどちらか，すなわち μ_1^2 もしくは μ_2^2 の値が負になればよい．トップの質量が十分大きければ，トップと結合する H_2 の質量 μ_2^2 の満たす繰り込み群方程式 (5.92) の右辺が正となり，値も大きいので，μ_2^2 は τ の増加関数となり，プランクスケールでは正であっても電弱スケールで負にできる[23,24] (図 5.12 参照)．ただし，スフェルミオンの質量の自乗を負にしてはいけない．バリオン数やレプトン数が保存しなくなるからである．このようにして標準理論においては手で入れてやらねばならなかった対称性の破れが，プランクスケールでの超対称性の破れから放射補正として導けるという点で，SUGRA は進んだ理論であり，しかもトップの質量をほぼ正確に (100～200 GeV) 予言したことで，大きな注目を集めている．

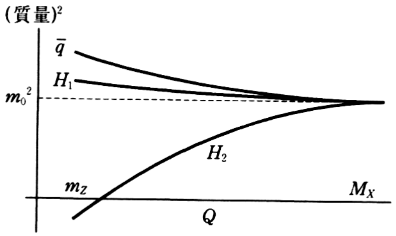


図 5.12　各種粒子の質量が M_X から発展する様子[25)]
トップの質量が大きいため，μ_2^2 が負の勾配をもち，電弱スケールでは負になる．

c. 質量公式[19)]

ゲージーノの質量は，対応する結合定数と同じ発展をするから，

$$M_i=\frac{\alpha_i(Q^2)}{\alpha_i(M_X^2)}m_{1/2} \tag{5.93 a}$$

$$M_3 : M_2 : M_1=g_s^2(\tau) : g_W^2(\tau) : \frac{5}{3}g_B^2(\tau) \tag{5.93 b}$$

$$g_B^2/g_W^2=\tan^2\hat{\theta}_W \tag{5.93 c}$$

が予言できる．ここで，$M_3=M(\tilde{g})$, $M_2=M(\widetilde{W})$, $M_1=M(\widetilde{B})$ である．したがって，$Q\simeq m_Z$ の電弱スケールでは，

$$M_3 : M_2 : M_1 \fallingdotseq 7 : 2 : 1 \tag{5.93 d}$$

となり，グルーイーノの質量は，ウィーノやビーノ($\tilde{B}$)に比べ相当大きいことを意味する．

ウィーノは，電荷をもつ $\tilde{W}^{\pm}$ と中性の $\tilde{W}^0$ に分けられる．$SU(2)\times U(1)$ 対称性が破れると，荷電ゲージーノ $\tilde{W}^{\pm}$ と荷電ヒッグシーノ $\tilde{H}^{\pm}$ が，中性ゲージーノ(ウィーノ $\tilde{W}^0$ とビーノ $\tilde{B}$)と中性ヒッグシーノ($\tilde{h}^0$ と $\tilde{H}^0$)がそれぞれ混合し，チャージーノ($\tilde{\chi}_1{}^{\pm}$, $\tilde{\chi}_2{}^{\pm}$)とニュートラリーノ($\tilde{\chi}_i{}^0$, $i=1\sim 4$)となる．番号は質量の小さい順につける．質量値は

$$m^2(\tilde{\chi}_{1,2}{}^{\pm})=\frac{1}{2}[(M_2{}^2+\mu^2+2m_W{}^2)$$
$$\mp\{\{M_2{}^2+\mu^2+2m_W{}^2)^2-4(\mu M_2-m_W{}^2\sin 2\beta)^2\}^{1/2}] \tag{5.94}$$

$|\mu|\gg M_2, m_W$ では，$\tilde{\chi}_1{}^{\pm}\sim\tilde{W}^{\pm}$, $\tilde{\chi}_2{}^{\pm}\sim\tilde{H}^{\pm}$ であり

$$m(\tilde{\chi}_1{}^{\pm})\simeq M_2-\frac{m_W{}^2(M_2+\mu\sin 2\beta)}{\mu^2-M_2{}^2} \tag{5.95 a}$$

$$m(\tilde{\chi}_2{}^{\pm})\simeq|\mu|+\frac{m_W{}^2(|\mu|+\varepsilon M_2\sin 2\beta)}{\mu^2-M_2{}^2} \tag{5.95 b}$$

で与えられる．$\varepsilon=\mathrm{sig}\,n(\mu)$ である．

ニュートラリーノについては，ゲージ固有状態 $\psi^0=(\tilde{B}, \tilde{W}, \tilde{H}_d{}^0, \tilde{H}_u{}^0)$ での質量行列

$$m(\tilde{\chi})=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & -c_\beta s_W m_Z & s_\beta s_W m_Z \\ 0 & M_2 & c_\beta c_W m_Z & -s_\beta c_W m_Z \\ -c_\beta s_W m_Z & c_\beta c_W m_Z & 0 & -\mu \\ s_\beta s_W m_Z & -s_\beta c_W m_Z & -\mu & 0 \end{bmatrix} \tag{5.96}$$

$$c_\beta=\cos\beta,\quad s_\beta=\sin\beta,\quad s_W=\sin\hat{\theta}_W,\quad c_W=\cos\hat{\theta}_W$$

を対角化すれば，質量固有状態 $\tilde{\chi}_i{}^0$ と質量値が得られるが，複雑な式となるので，$|\mu|\gg M_2, m_Z$ に成り立つ近似式のみをあげておく．

$$m(\tilde{\chi}_a{}^0 : a=1, 2)\simeq M_a-\frac{m_Z{}^2 s_W{}^2(M_a+\mu\sin 2\beta)}{\mu^2-M_a{}^2} \tag{5.97}$$

$|\mu|\gg M_2, m_Z$ のとき，$\tilde{\chi}_1{}^0\sim\tilde{B}$, $\tilde{\chi}_2{}^0\sim\tilde{W}^0$ であり，この近似では質量間に，$m(\tilde{\chi}_1{}^{\pm})\fallingdotseq m(\tilde{\chi}_2{}^0)\fallingdotseq 2m(\tilde{\chi}_1{}^0)$ の関係式が成立する．逆に $|\mu|\ll M_1, M_2$ のときは，$\tilde{\chi}_{1,2}{}^0$, $\tilde{\chi}_1{}^{\pm}$ はヒッグシーノ $\tilde{h}^0$, $\tilde{H}^0$, $\tilde{H}^{\pm}$ に近い．

スクォーク $\tilde{q}$ とスレプトン $\tilde{l}$ の質量は，繰り込み群発展方程式(5.92)を具体的に書き下ろせば得られる．小さい係数を省略すれば，第1，2世代については近似的に次のように表せる．$\tilde{Q}_1=(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$，$\tilde{Q}_2=(\tilde{c}_L, \tilde{s}_L)$，$\tilde{L}_1=(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$，$\tilde{L}_2=(\tilde{\nu}_{\mu L}, \tilde{\mu}_L)$ として

$$\tilde{m}^2(\tilde{Q}_{1L})=\tilde{m}^2(\tilde{Q}_{2L})=m_0{}^2+K_3+K_2+\frac{1}{36}K_1+\Delta(\tilde{Q}_L) \qquad (5.98\,\mathrm{a})$$

$$\tilde{m}^2(\tilde{u}_R)=\tilde{m}^2(\tilde{c}_R)=\quad m_0{}^2+K_3\qquad+\frac{4}{9}K_1+\Delta(\tilde{u}_R) \qquad (5.98\,\mathrm{b})$$

$$\tilde{m}^2(\tilde{d}_R)=\tilde{m}^2(\tilde{s}_R)=\quad m_0{}^2+K_3\qquad+\frac{1}{9}K_1+\Delta(\tilde{d}_R) \qquad (5.98\,\mathrm{c})$$

$$\tilde{m}^2(\tilde{L}_1)=\tilde{m}^2(\tilde{L}_{2L})=\ m_0{}^2\qquad+K_2+\frac{1}{4}K_1+\Delta(\tilde{L}_L) \qquad (5.98\,\mathrm{d})$$

$$\tilde{m}^2(\tilde{e}_R)=\tilde{m}^2(\tilde{\mu}_R)=\quad m_0{}^2\qquad\qquad+\quad K_1+\Delta(\tilde{l}_R) \qquad (5.98\,\mathrm{e})$$

K_1, K_2, K_3 は，$U(1), SU(2), SU(3)$ のゲージーノループの寄与で，次式で与えられる．

$$K_a=\begin{bmatrix}3/5\\3/4\\4/3\end{bmatrix}\times\frac{1}{\pi}\int_{\ln Q^2}^{\ln Q_0{}^2}\mathrm{d}\tau\alpha_a(\tau)|M_a(\tau)|^2 \qquad (5.99\,\mathrm{a})$$

Q_0 は出発点のスケールである．(5.98) における K_1 の比例係数はハイパーチャージ $(Y/2)^2$ である．Δ は電弱相互作用の破れに伴う超微細構造であり，

$$\Delta(\tilde{f}_L)=(I_3-Q_{EM}\sin^2\hat{\theta}_W)m_Z{}^2\cos 2\beta+m_f{}^2 \qquad (5.99\,\mathrm{b})$$

$$\Delta(\tilde{f}_R)=Q_{EM}\sin^2\hat{\theta}_W m_Z{}^2\cos 2\beta+m_f{}^2 \qquad (5.99\,\mathrm{c})$$

$SU(2)\times U(1)$ の縮退を解く効果がある．例えば，

$$\Delta(\tilde{u}_L)=(1/2-2s_W{}^2/3)m_Z{}^2\cos 2\beta+m_u{}^2$$

$$\Delta(\tilde{d}_L)=(-1/2+s_W{}^2/3)m_Z{}^2\cos 2\beta+m_d{}^2$$

であり，$\tilde{u}_L$ と $\tilde{d}_L$ が分離する．m_f は第1, 2世代では無視できる．

$Q_0=M_X\fallingdotseq 2\times 10^{12}$ GeV として数値計算すると，$Q\sim 1$ TeV 付近では，

$$K_1\fallingdotseq 0.15\ \mathrm{m}^2{}_{1/2},\quad K_2\fallingdotseq 0.5\ \mathrm{m}^2{}_{1/2},\quad K_3\fallingdotseq(5.8\pm 1.0)m^2{}_{1/2}$$

すなわち，$K_3\gg K_2\gg K_1>0$ である．このことから，スクォークとスレプトンの質量を決める大きな要因は m_0 と $m_{1/2}$ であることがわかる．より詳細にみると，まず第1，2世代についてはすべてのスクォークはほぼ縮退すること，

スクォークはスレプトンより一般に大きい質量をもつことがいえる．スレプトンの質量は m_0 に近い，m_0 が非常に小さければ，スカラー粒子全体の質量が小さくなるとともにスレプトンの縮退が解ける．

上記の質量公式は左右混合の効果を無視したものである．トップスクォーク(ストップという) $\tilde{t}$ の質量固有状態 $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ は，$(\tilde{t}_L, \tilde{t}_R)$ を基底とした質量行列，

$$\tilde{m}^2(\tilde{t})=\begin{bmatrix} \tilde{m}^2(\tilde{t}_L), & m_t(A_t-\mu\cot\beta) \\ m_t(A_t-\mu\cot\beta), & \tilde{m}^2(\tilde{t}_R) \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

を対角化して得られる．$\tilde{m}^2(\tilde{t})$ の式は，(5.98) の $\tilde{m}^2(\tilde{u})$ から $m_u\to m_t$ として得られる．A_t は t クォークの A パラメターである．$\tilde{d}, \tilde{\tau}$ などアイソスピン $I_3=-1/2$ の質量行列は，しかるべき質量に置き換えさらに $\cot\beta\to\tan\beta$ として得られる．混合はヒッグスを仲介とする湯川結合で生じ，強さがクォークもしくはレプトンの質量に比例するので，第 1, 2 世代では無視できる．しかし，第 3 世代のクォークやレプトンは質量が大きく，湯川結合による繰り込み効果が大きいので，左右混合を起こして質量を分離するとともに質量そのものを押し下げる．特に

$$\tilde{m}(\tilde{t}_1)\ll\tilde{m}(\tilde{t}_2)\lesssim\tilde{m}(\tilde{Q}_{1,2})$$

そしてたぶん，$\tilde{m}(\tilde{b}_1)\ll\tilde{m}(\tilde{b}_2)$，$\tilde{m}(\tilde{\tau}_1)\ll\tilde{m}(\tilde{\tau}_2)$ も成立する．この結果として，スクォークの中では $\tilde{m}(\tilde{t}_1)$ が，荷電スレプトンの中では $\tilde{m}(\tilde{\tau}_1)$ がおそらく最も軽くなる．

これらの質量公式は，不要な FCNC (香りを混ぜる中性カレント) を発生させないという (5.87) の条件を満たしているが，それは $Q\sim M_X$ で共通の質量をもつという要請からでてきたものである．

5.6.3 GMSB モデル[26,27]

超対称性を柔らかに破るもう一つの有力なモデルであり，mSUGRA と同じような効果をだせる機構である．GMSB とは，gauge mediated symmetry breaking の略である．mSUGRA と同じく，隠れた領域で超対称性を破るが，見える領域とは重力でなく，メッセンジャー粒子を介して既知のゲージ相互作用によって結合する．

a. メッセンジャー粒子

このために，メッセンジャーとして標準理論の量子数 $(SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y)$ をもつ新しいカイラル多重項 $\Phi\sim Q, L, Q^c, L^c$ を導入する．最も簡単な仮定は量子数

$$Q\sim(3,1,1/3),\qquad Q^c\sim(3^*,1,-1/3)$$
$$L\sim(1,2,1/2),\qquad L^c\sim(1,2,-1/2)$$

をもつとすることである．(Q,L), (Q^c,L^c) を $SU(5)$ の $\mathbf{5}$ と $\mathbf{5}^*$ に属すると見なしてもよい．ここで，見える領域とは相互作用をしないが，隠れた領域でメッセンジャーとは次のような超対称性ポテンシャルを通じて結合する超対称カイラル多重項 T を導入する．この多重項は一つの粒子というよりは，超対称性を破る力学機構を象徴化したものと見なすべき量である．

$$W(\mathrm{SUSY})=y_2T\bar{L}L+y_3T\bar{Q}Q \tag{5.101}$$

y_j は湯川結合定数である．超対称性が破れて T のスカラー成分と T に伴う補助場 F_T*1) が真空期待値 $\langle T\rangle, \langle F_T\rangle$ をもつと，Q, L のフェルミオン成分 f とスカラー成分 s が，それぞれ質量を獲得する．

$$m(Q_f)=y_3\langle T\rangle\equiv M,\qquad m(L_f)=y_2\langle T\rangle\fallingdotseq M \tag{5.102 a}$$

$$m(\Phi_s)=M\sqrt{1\pm\frac{\Lambda}{M}},\qquad \Lambda\equiv\frac{\langle F_T\rangle}{\langle T\rangle} \tag{5.102 b}$$

M がメッセンジャーのスケールを表し，Λ は SUSY の破れに伴い現れる質量分岐を表す．このメッセジャーが見える領域の粒子と通常のゲージ相互作用をすることにより，超粒子に質量を与えるので見える領域の超対称性が破れる．

b. GMSB の質量公式

ゲージーノ (λ_i) はメッセンジャーの 1 ループ相互作用を通じて質量を獲得する (図 5.13)．スカラー粒子 $(\tilde{q},\ \tilde{l})$ への 1 ループ寄与はなく，2 ループ相互作用を通じて質量を獲得する (図 5.14)．$\langle F_T\rangle\ll y_i\langle T\rangle^2$ とすればループからの寄与により，メッセンジャースケール領域でゲージーノは

$$M_i=N\frac{\alpha_i}{4\pi}\Lambda \tag{5.103 a}$$

スカラー粒子は

---

*1) 超対称性を保存するために導入される，カイラル多重項に付随するスカラー場で，質量の自乗の次元をもつ．時空を伝播せず，運動方程式を使えばカイラル多重項に属する場で書き直すことができる．

$$\widetilde{m}^2 = 2\Lambda^2 N\left[C_3\left(\frac{\alpha_3}{4\pi}\right)^2 + C_2\left(\frac{\alpha_2}{4\pi}\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{Y}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha_1}{4\pi}\right)^2\right] \qquad (5.103\,\mathrm{b})$$

だけの質量を獲得する．N はメッセンジャー多重項の組の数で最小 GMSB では $N=1$ とする．$C_a\delta_{ab}=(\sum t_i t_i)_{ab}$ は群のカシミヤ演算子係数で，式 (5.99) に現れた K_a の係数と同じものである．C_3 はカラー 3 重項では 4/3，1 重項は 0，C_2 は電弱 2 重項では 3/4，1 重項は 0 で，Y は $U(1)$ ハイパーチャージである．SUSY の破れのスケールは $\sim O(1\ \mathrm{TeV})$ なので，$\Lambda\sim O(10\sim100\ \mathrm{TeV})$ が要求されるが，それ以外はメッセンジャーの質量に対する制限はない．$M \sim O(\langle F_T\rangle^{1/2})$ ならば超対称性が破れるスケールは $\langle F_T\rangle$ が $10^4\sim10^5\ \mathrm{GeV}^2$ 程度に小さい状況もありうる．

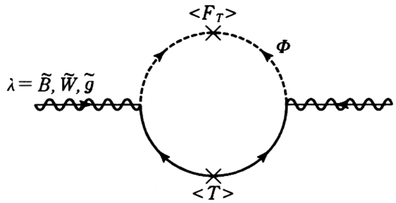


図 5.13　ゲージーノに質量を与えるメッセンジャーの 1 ループ寄与
ループの実線がフェルミオン，ダッシュ線がスカラー部分，X は超対称性の破れに伴う質量項を示す．

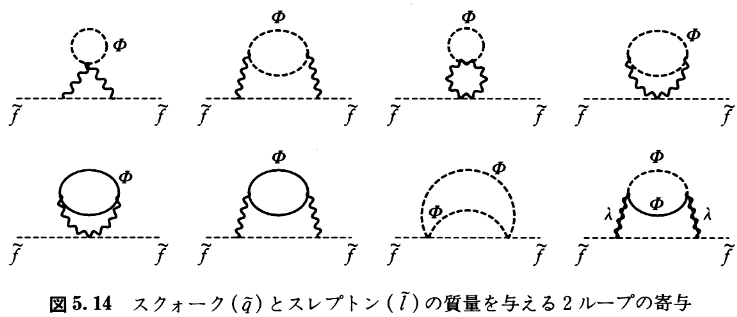


図 5.14　スクォーク ($\tilde{q}$) とスレプトン ($\tilde{l}$) の質量を与える 2 ループの寄与
1 ループは寄与しない．〰〰 はゲージ粒子，Φ (------ スカラー部分，—— フェルミオン部分) がメッセンジャー，$\tilde{f}$ (------) が $\tilde{q}$, $\tilde{l}$ を，λ (〰〰) がゲージーノを表す．

式 (5.88) に掲げた超対称性をソフトに破る五つの項のうち，A パラメターに対する寄与は 2 次ループでその上に α_i がかかるので，メッセンジャースケールでは無視してよい．B パラメターは，SUGRA のところで議論したように $\tan\beta$ で置き換えられるので，GMSB でのパラメターは

$$(\tan\beta, M, \Lambda, \mu \text{の符号}) \tag{5.104}$$

の四つとなる．$N\neq 1$ とすればもう一つパラメターが増える．

c. GMSB の特徴

mSUGRA と比較した場合，GMSB の第 1 の特徴は，対称性を破るスケールが mSUGRA に比べて非常に小さいということである．第 2 の特徴は，メッセンジャーはゲージ相互作用を通じて見える領域と相互作用をするので，香りによる差がでないということである．mSUGRA では手で入れなければならなかった香りを変える相互作用の抑圧機構が，GMSB では，モデルの中に自動的に組み込まれている．

GMSB の第 3 の特徴は出発点となるメッセンジャースケールで，各ゲージーノ，スクォークやスレプトンの各種超粒子にすでに質量差があることである．しかし，エネルギースケールの大きなところ ($Q\sim M_X\sim M_{GUT}$) では統一されていて，繰り込み群方程式によりここまで発展してきたと考えることも可能である (そのときは統一を実現するためにたぶん $N>1$ が必要)．ゲージーノの階層を表す式 (5.93) は，GMSB でも有効である．メッセンジャーよりエネルギーの低いスケールへ行くにはさらに繰り込み群方程式で発展させる．その結果は，電弱スケールで H_u の質量を負に追い込み電弱対称性の破れを実現する．スカラー粒子に対する質量公式 (5.98) は，GMSB では $m_0=0$ とするが，出発点のメッセンジャースケールですでに分岐しているので，K_a の大小は多少変更されるものの，質量の階層関係については mSUGRA とほぼ同様な結果を与える．

$\sqrt{\langle F_T\rangle}$ が $10^{10}\sim 10^{11}$ GeV に近づけば，$M\sim M_{Planck}$ となるので重力が無視できなくなり，その効果も混入してくるが，通常の GMSB では，$\sqrt{\langle F_T\rangle}\ll 10^{10}$ GeV を仮定し重力効果を無視する．この結果として，グラヴィティーノ $\widetilde{G}$ の質量が非常に小さくなる[28]．グラヴィティーノの質量は通常 $m_{3/2}$ と書く．

$$m_{3/2}=M(\widetilde{G})=\frac{\langle F_T\rangle}{\sqrt{3}M_{Planck}}=2.4\frac{\langle F_T\rangle}{(100\ \mathrm{TeV})^2}\ \mathrm{eV} \tag{5.105}$$

したがってモデルのつくり方にもよるが，GMSB での最も軽い粒子 (LSP) は通常はグラヴィティーノとなる．これが，GMSB の第 4 のそしてたぶん最大の特徴である．一方 mSUGRA では，$\sqrt{\langle F_T\rangle}\sim 10^{11}$ GeV であるのでグラヴィ

ティーノの質量は他の超粒子と同程度 ($\sim O(1\ \mathrm{TeV})$) あり，かつ相互作用の強さは重力程度であるので加速器実験ではその存在を無視できる[*2)]．GMSB ではグラヴィティーノが LSP となるため，mSUGRA で有力な LSP 候補とされた $\tilde{\chi}_1^0$ は，第 2 番目に軽い粒子 (NLSP) となる．ただし，モデルによっては $\tilde{\tau}_R$ が NLSP になる可能性もある．NLSP はグラヴィティーノに次のような反応で壊れる．

$$\tilde{\chi}_1^0 \longrightarrow \gamma + \tilde{G}, \qquad \tilde{\tau}_R{}^{\pm} \longrightarrow \tau^{\pm} + \tilde{G} \tag{5.106}$$

$\tilde{\chi}_1^0$ が $\tilde{B}$ に近ければ，この崩壊の寿命は，

$$\Gamma(\tilde{\chi}_1^0 \to \gamma\tilde{G}) = \frac{\cos^2\hat{\theta}_W \tilde{m}^5(\tilde{\chi}_1^0)}{16\pi\langle F_T\rangle^2} \tag{5.107 a}$$

で与えられる．数値を評価すると崩壊距離が

$$c\tau \simeq 130\left(\frac{100\ \mathrm{GeV}}{M(\tilde{B})}\right)^5\left(\frac{\sqrt{\langle F_T\rangle}}{100\ \mathrm{TeV}}\right)^4 \mu\mathrm{m}\ \text{（ミクロン）} \tag{5.107 b}$$

と計算されている[28,29)]．グラヴィティーノの質量が小さければ寿命は短い．放出フォトンは測定上は孤立フォトンとなるので，超粒子検出の際の有力な手段となる．

5.6.4 質量スペクトルのまとめ[19)]

モデル構築にもよるので例外はあるが，mSUGRA, GMSB などを指針とした解析をまとめると，ほぼ次のようなことがいえる．

(1) 最も軽い超粒子 LSP は，mSUGRA ではニュートラリーノ $\tilde{\chi}_1^0$，GMSB ではグラヴィティーノ $\tilde{G}$ である．

(2) グルーイノは，チャージーノやニュートラリーノよりはかなり重い (式 (5.93) 参照)．電弱スケールでは，

$$M_3 : M_2 : M_1 \fallingdotseq 7 : 2 : 1$$

(3) スクォーク ($\tilde{q}$) の質量は，第1, 2世代ではほとんど縮退している．理由は，繰り込み群方程式による大きな付加項はゲージーノループからなので各項に共通しているからである．$\tilde{q}_L$ は $\tilde{q}_R$ よりやや重い．理由はウィーノ ($\tilde{W}^{\pm}$) からの寄与 (K_2 項) がアイソスピンで差がつくからである．同じ理由

*2) 宇宙論では暗黒物質の有力候補となる．

で第 1, 2 世代のスレプトン ($\tilde{l}$) もほとんど縮退をしており，$\tilde{l}_L$ は $\tilde{l}_R$ よりやや重い．

(4)　$\tilde{q}$ は $\tilde{l}$ より重い．式(5.98)に典型的に示されているように，繰り込み群方程式による発展でグルーイーノの寄与が大きいからである．

(5)　第 1, 2 世代のスクォーク $\tilde{q}$ は，mSUGRA ではグルーイーノ質量の 80%より軽くはなく，GMSB ではグルーイーノの約 60%である．これは，スクォークの質量に占めるグルーイーノ質量の寄与が大きいことによる．

(6)　第 3 世代は，質量が大きくヒッグスに強く結合するので，ヒッグスを通じた左右 ($\tilde{q}_L$ と $\tilde{q}_R$) の混合が大きく，$\tilde{t}_L$ と $\tilde{t}_R$ は質量固有状態 $\tilde{t}_1$ と $\tilde{t}_2$ に別れる (たぶん $\tilde{b}$ と $\tilde{\tau}$ も)．質量差が大きく，かつ質量を大きく押し下げる．このためスクォーク $\tilde{q}$ の中では $\tilde{t}_1$ が最も軽いと考えられる．

(7)　超対称性があるときの中性ヒッグス粒子のうち軽い方 (h^0) は，150 GeV よりは軽く，さらに 120 GeV より軽い確率が高い (§ 3.4.1 参照)．

図 5.15 に一つのモデルを指定したとき，すなわちパラメターに特定の数値を入れたときの mSUGRA スペクトル例をあげる[25)]．

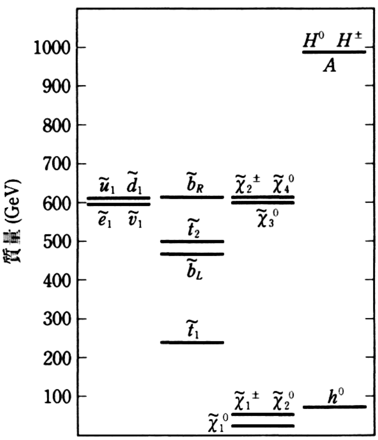


図 5.15　mSUGRA による SUSY 粒子の質量の予言例[25)]
(m_0=600 GeV，$M(\tilde{g})$=160 GeV，$\tan\beta$=1.73，$A_{\rm top}$=0.0，$\mu<0$ とした)
第 1 列は，第 2 世代までのスクォークとスレプトン，第 2 列は第 3 世代のスクォーク，第 3 列はチャージーノとニュートラリーノ (軽い順に番号を振る) を示す．第 4 列はヒッグスの質量である．この表は各超粒子質量の相互関係を知るためのガイドで，数値は単なる目安と見なすべきである．

5.7 超粒子探索

以下でこれまでの超粒子探索状況を概観してみよう．超粒子の相互作用は判っているので質量スペクトルがわかれば，実際にどのような生成崩壊モードが観測されるかは，モデルの範囲内で予言可能となる．通常の解析では，一番軽いニュートラリーノ（$\tilde{\chi}_1{}^0$）を安定で一番軽い超粒子 (LSP : lightest super particle) と見なす．$\tilde{\chi}^0$ は一般に他の粒子と電磁相互作用をすることができるが，R パリティ保存より中間状態として質量の大きい $\tilde{q}$ もしくは $\tilde{l}$ を通るので，反応断面積は，$\sim(\alpha^2/m(\tilde{q})^4)s$ に比例する．$m(\tilde{q})$ が大きいので反応の強さは弱相互作用以下となる．つまり LSP は，ニュートリノと同じく物質と相互作用をほとんどせず，検出信号は見えないエネルギーとなる．GMSB ではグラヴィティーノが LSP であり，$\tilde{\chi}_1{}^0$ が NLSP であるので，$\tilde{\chi}_1{}^0\to\gamma\tilde{G}$ が可能で見えないエネルギーと孤立フォトンが検出信号となる．

5.7.1 チャージーノ，ニュートラリーノ，スレプトン

a. 生成機構

LEPI では，Z の生成断面積が大きいにもかかわらず Z 崩壊の中にこれらの生成物がなかったことから，チャージーノに関して $m(\tilde{\chi}^{\pm})>m_Z/2$，スニュートリノに対し $\tilde{m}(\tilde{\nu})>43$ GeV がいえる[10]．スニュートリノの質量下限値が $m_Z/2$ よりやや小さいのは，チャージーノに比べ Γ_Z への寄与がやや小さく位相体積が不足するからである．スレプトンへの制限はスニュートリノよりやや弱い．これに反しニュートラリーノの質量に対しては制限がつけられない．混合具合によっては (例えば純粋なフォチーノ $\tilde{\gamma}$ の場合)，Z に少なくともトリー近似では結合しない場合もあるからである．

e^-e^+ 反応の重心系エネルギー $\sqrt{s}$ が m_Z を超えると，チャージーノ $\tilde{\chi}_i{}^{\pm}$ は s チャネルで γ, Z 交換により，t チャネルでスレプトン交換により生成できる (図 5.16 (b) (e))．結合定数はわかっているので，質量と混合比を与えれば生成断面積や崩壊分岐比が計算できる．生成断面積は 1〜10 pb 程度である．

ニュートラリーノやチャージーノがゲージーノに近いとき(($\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_2^0$, $\tilde{\chi}_1^{\pm}$) ~($\tilde{B}$, $\tilde{W}^0$, $\tilde{W}^{\pm}$)), t チャネル交換の質量が大きければ干渉効果は小さいが，質量が小さいと干渉効果が大きく，チャージーノ生成断面積を小さくする．ニュートラリーノ生成断面積は，もともとスレプトン交換の t チャネル寄与が優勢であるので，断面積が大きくなる．ヒッグシーノ成分が大きいときは，断面積は全体的に大きくかつスレプトン質量にほとんど依存しない，スレプトンの質量はほとんど m_0 に等しく，スクォークの質量はもっと大きいので，スレプトンの質量(あるいは m_0)を大きくとれば，スフェルミオンが生成されないこと，またそれらへ崩壊しないことを意味するので，解析は容易になる．

$\tilde{e}$ (電子の超粒子パートナー) の生成は s チャネル γ, Z 交換と t チャネルニュートラリーノ交換で生成される(図 5.16 (c), (f))，スミューオン ($\tilde{\mu}$) やスタウ ($\tilde{\tau}$) に関しては s チャネルの γ/Z 交換項のみ効くので，モデルに依存しない質量下限が得られやすい．

実験的には，親粒子と LSP との質量差 Δm が小さくなると，見えないエネルギーが小さくなり，いわゆる 2γ 過程からの雑音事象との分離が困難になる．Δm が10 GeV 以上あるときは効率良い選別が可能であるが，~5 GeV くらい以下になるとむずかしい．ニュートリノラリーノやチャージーノの質量は，μ, M_2, $\tan\beta$ の関数であるので，これらのパラメター領域に除外領域が生

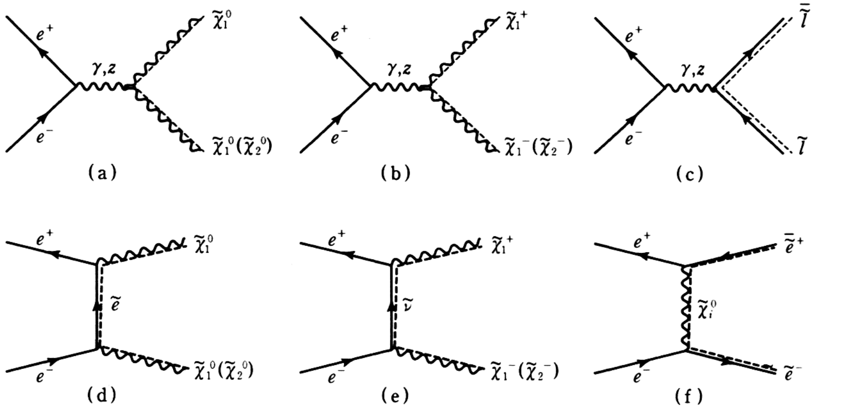


図 5.16 $e^-e^+ \to$ ニュートラリーノ，チャージーノ，スレプトン生成
(a)~(c) は s チャネルで γ, Z を交換する $\tilde{\chi}_1^0\chi_1^0$, $\tilde{\chi}_2^-\tilde{\chi}_1^+$, $\tilde{e}\,\bar{\tilde{e}}$ 対生成，(d), (e), (f) は t チャネル振幅．

じることになる．以上の考察の意味するところは，実験で正確に決められるのは，超粒子の生成断面積と崩壊分岐比の上限であり，それらの値を超粒子の質量下限に翻訳するには，一般にモデルが必要となるということである．

b.　生成信号と質量下限

生成されたチャージーノ，ニュートリノやスレプトンは，$\tilde{\chi}_1{}^0$ が LSP の場合は

$$\tilde{\chi}_2{}^0 \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 + Z^*, \qquad Z^* \longrightarrow l\tilde{l}\,,\, q\tilde{q} \tag{5.108 a}$$

$$\tilde{\chi}_1{}^{\pm} \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 + W^*, \qquad W^* \longrightarrow l\nu,\, q\tilde{q}' \tag{5.108 b}$$

$$\tilde{l} \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 + l \tag{5.108 c}$$

などによりレプトンもしくはジェットと $\tilde{\chi}_1{}^0$ を放出する．LSP は測定器に検出されないので，超粒子信号は開口角が 180 度に満たない (運動量がバランスしない) レプトン対とジェット対である．GMSB では LSP が $\tilde{G}$ であり，$\tilde{\chi}_1{}^0$ は NLSP であるので，さらに

$$\tilde{\chi}_1{}^0 \longrightarrow \gamma + \tilde{G} \tag{5.109}$$

の崩壊をしてフォトンを放出する．したがって，フォトンが付随するかどうかを見ることにより，GMSB と mSUGRA との区別がつけられる．$\tilde{\chi}_1{}^0$ が NLSP でも，崩壊寿命が大きいと LSP と同じ振る舞いをする．いずれにせよ非常に特徴的な信号をだすので，これらの超粒子が生成されれば検出は容易である．e^-e^+ 衝突型加速器は，現在 LEPII ($\sqrt{s}=200$ GeV) への移行段階にあるが，超粒子は発見できていない．

ニュートラリーノやチャージーノはハドロンコライダーでも，W, Z 交換もしくはスクォークやグルーイーノの崩壊により生成可能である．特に $\tilde{\chi}_1{}^+\tilde{\chi}_2{}^0$ 生成を通すチャネルは，$\tilde{\chi}_1{}^+ \to \tilde{\chi}_1{}^0 l\nu$, $\tilde{\chi}_2{}^0 \to \tilde{\chi}_1{}^0 l\bar{l}$ により 3 個の孤立レプトンを放出するので，見つけやすいチャネルとされている．しかし，一般に QCD バックグラウンドがおおきいので，今までのところ LEP を超える上限値をだした例は限られている．ただし，$\tilde{\chi}_1{}^0 \to \gamma\tilde{G}$ を仮定すれば (GMSB), $\gamma\gamma+$ 見えないエネルギーという特徴的な信号が得られるので，エネルギーの高い利点を使い，大きな質量下限値を得ている．

種々のデータをまとめると，今までのところ以下のような値が得られてい

る[10,30~32]．無条件の質量下限値を得るのは困難で，典型的な条件を併記してある．

$$
\begin{aligned}
m(\tilde{\chi}_1^{\pm}) &> 86\ \mathrm{GeV} && \tilde{m}(\tilde{\nu}) > 200\ \mathrm{GeV} \\
&> 67\ \mathrm{GeV} && \tilde{m}(\tilde{\nu}) > \tilde{m}(\tilde{\chi}^{\pm}) \\
&> 150\ \mathrm{GeV} && \mathrm{GMSB}
\end{aligned}
\tag{5.110 a}
$$

$$
\begin{aligned}
m(\tilde{\chi}_1^{0}) &> 25\ \mathrm{GeV} && \mathrm{any}\tan\beta,\quad m(\tilde{\nu}) > 200\ \mathrm{GeV} \\
&> 14\ \mathrm{GeV} && \mathrm{any}\tan\beta,\ m_0 \\
&> 75\ \mathrm{GeV} && \mathrm{GMSB}
\end{aligned}
\tag{5.110 b}
$$

$$m(\tilde{e}_R) > 75\ \mathrm{GeV} \qquad \Delta M > 10\ \mathrm{GeV} \tag{5.110 c}$$

$$m(\tilde{\mu}) > 75\ \mathrm{GeV} \qquad \Delta M > 10\ \mathrm{GeV} \tag{5.110 d}$$

$$m(\tilde{\nu}) > 43\ \mathrm{GeV} \tag{5.110 e}$$

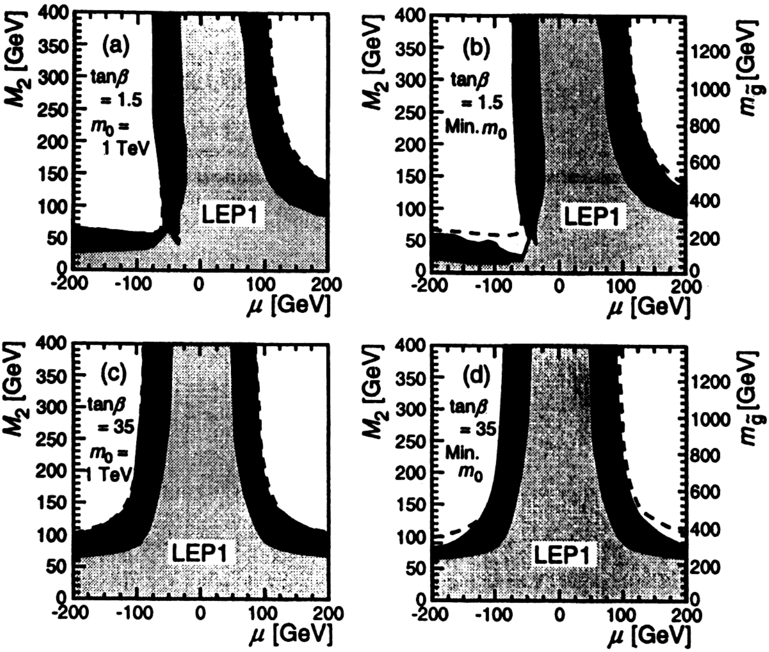


図 5.17 チャージーノ，ニュートラリーノ生成から得られた μ-M_2 平面での除外領域[31]
M_2 は $SU(2)$ ゲージーノ質量，μ は超対称ヒッグスポテンシャルの混合パラメター，灰色部分が LEP 1 (Z 崩壊) で得られ，LEP 2 の実験で除外領域が黒色部分へと拡張された．m_0 はスレプトンの共通質量で，左側が $m_0=1$ TeV，右側が m_0 条件をはずした図．テヴァトロンとの比較のため右側にグルーイーノ質量を目盛った．

モデルに依存する質量値で表す代わりに，ニュートラリーノとチャージーノの質量は $\tan\beta$ と m_0 を与えれば，μ と M_2 で書けるので，μ と M_2 の除外領域として表すことも多い (図 5.17)[31,33].

なお，質量スペクトルは $\tan\beta$ にも依存する．トップクォークの質量が 175 GeV であること，GUT スケールでもトップの湯川結合が極端に大きくならないとの条件を要請すると $\tan\beta \gtrsim 1.2$，同じくボトムの湯川結合が極端に大きくならないと要請すると $\tan\beta \lesssim 60$ が言える．したがって $\tan\beta$ の値は通常この範囲に設定することが多い．典型的な値は $\tan\beta = m_t/m_b \fallingdotseq 35$ である．

5.7.2　スクォークとグルーイーノ

強い相互作用をするので，エネルギーが十分高くて生成のしきい値を超えていれば，次のような反応によりハドロンコライダーで大量に生成可能である．

$$q+\bar{q} \longrightarrow \tilde{q}\,\bar{\tilde{q}},\ \tilde{g}\,\tilde{g}$$
$$g+q \longrightarrow \tilde{g}\,\tilde{q} \tag{5.111}$$

$\tilde{q}$ の質量が $\tilde{g}$ の質量より大きければ (通常の mSUGRA)

$$\tilde{q} \longrightarrow q\tilde{g} \tag{5.112 a}$$
$$\tilde{g} \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 Z^* \tag{5.112 b}$$
$$\tilde{g} \longrightarrow \tilde{\chi}^{\pm} W^{*\mp},\ \tilde{\chi}_2{}^0 Z^* \tag{5.112 c}$$
$$\tilde{\chi}_2{}^0 \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 Z^*$$
$$\tilde{\chi}^{\pm} \longrightarrow \tilde{\chi}_1{}^0 W^{*\pm}$$
$$Z^* \longrightarrow q\bar{q},\ l\bar{l} \tag{5.112 d}$$
$$W^* \longrightarrow q\bar{q}',\ l\nu \tag{5.112 e}$$

$\tilde{g}$ の質量が $\tilde{q}$ の質量より大きければ

$$\tilde{g} \longrightarrow q\,\bar{\tilde{q}},\ \bar{q}\,\tilde{q} \tag{5.113 a}$$
$$\tilde{q} \longrightarrow q\tilde{\chi}_j{}^0,\ q'\,\tilde{\chi}_j{}^{\pm} \tag{5.113 b}$$

のように崩壊するので，特徴的な検出信号は，“$n(\geqq 1)$ 個のジェットまたは孤立レプトン＋見えないエネルギー” となる．

現在，テバトロンでは発見されておらず，スクォーク $\tilde{q}$ とグルーイーノ $\tilde{g}$ の質量除外領域は図 5.18 のようになっている[34].

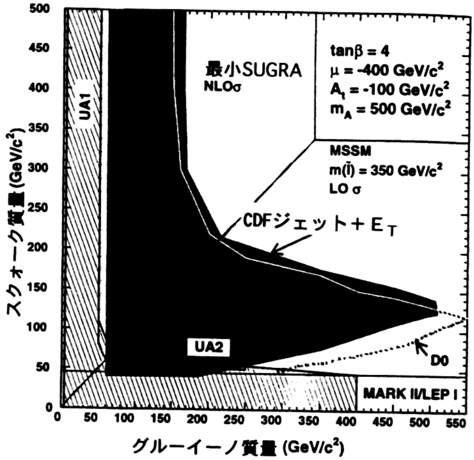


図 5.18　スクォーク ($\tilde{q}$) とグルーイーノ ($\tilde{g}$) 質量除外領域[34)]
テバトロンでのジェット＋見えないエネルギー信号による $\tilde{q}, \tilde{g}$ 探し，$\tilde{\chi}_1^0$ を LSP と仮定．$m\tilde{q} > m\tilde{g}$ の領域は最小 SUGRA モデル使用．
$m\tilde{q} < m\tilde{g}$ は最小 SUGRA では実現困難な領域．ここでは MSSM と $M(\tilde{l})=350\,\mathrm{GeV}/c^2$ を仮定．$m\tilde{q}=50\sim150\,\mathrm{GeV}$, $m\tilde{g}\gtrsim250\,\mathrm{GeV}$ の穴は，ここでは $m\tilde{q}$ が小さく，見えない運動量が小さいため検出効率が下がることにより生じる．他の実験 UAI，MARK II，LEPI による除外領域も示す．

5.8　お　わ　り　に

第 4 章およびこの章では，標準理論を越える可能性をいろいろ探った．標準理論が出現して 30 年あまり，この期間はほとんどすべての実験が標準理論の検証に費やされ標準理論はそれにほぼ完璧に答えてきた．標準理論の検証で欠けているところは，ヒッグスの存在と CP の破れの解明である．CP に関しては，e^+e^- による B ファクトリー（もしくはテバトロン，LHC での B 実験）に待たざるをえない．しかし，これらの検証結果が標準理論を追認するだけに終わるか，それとも越えるかはやってみないとわからない．その点で，ヒッグス粒子の存否およびその性質の解明は標準理論の限界を知る上で最も重要な検証事項である．

標準理論を越える理論の第一の候補は大統一理論である．大統一が正しければどのような兆候があるかをこの章では探った．陽子崩壊，天体現象など大統一理論の直接検証は，非加速器素粒子実験に頼ることが多いが，大統一現象に

対して開いている実験工場の窓は非常に小さい．それでも，標準理論を越える最初の実験データが，大気ニュートリノなど天体現象から得られたことは注目に値する．

標準理論の限界を探り将来への手がかりを得る上で，最も直接的でかつ可能性が大きいのは，第3章も述べたように，ヒッグス粒子の追求であると考えられる．高エネルギーの電子陽電子コライダーやLHCでヒッグス粒子を発見し，その性質を明らかにすることは重要である．ヒッグスが比較的軽いところにあり，素粒子であることがわかれば，超対称性の存在は必然的であろう．このときは，ヒッグスの質量の値に対する論理的自然さの議論から，$\sim O(1\mathrm{TeV})$ 付近に超粒子が見つかる可能性が高い．超対称性の可否そのものは，軽い中性ヒッグスの存否をチェックすることにより比較的早期に検証が可能かもしれない．もし，超対称性の存在が否定的であれば，複合モデルを採用せざるをえない．しかし，超対称性自身は，非常に魅力的な考え方であり，またいまのところ，重力統一のための唯一の手段であることを考えると十分生き残る可能性はある．素粒子の原形態は点でなく1次元的に広がった紐であるとする超紐理論など，その方面の理論的活動はかなり活発である．ヒッグスが重くて（実験的理論的検出限界は $\lesssim 1\mathrm{TeV}$）発見できないときもまた，複合モデル（テクニカラーなど）が正しい可能性が大いに増す．このときは，ヒッグスが強結合になるので，テクニカラー共鳴群などが，やはり $O(1\mathrm{TeV})$ 付近で発見される可能性が大いにある．

標準理論の成功があまりに大きく，過去30年間で標準理論を越える実験事実は，ニュートリノ振動現象以外にはいまだ発見されていない．これはある意味で，高エネルギー物理学の危機である．理論的な可能性はいろいろ検討されたものの，これ以上進める手がかりが少ないのである．その意味で，再び実験が新事実を提供し，理論の道標になるべきときがきているといえよう．LEPII，フェルミ研究所のテヴァトロンの増強，B-ファクトリーの開始も間近であるので，標準理論を越える何らかのヒントが得られる可能性はある．しかし，本格的な手がかりは，TeV級の加速器に期待するところが大きい．LHC実験開始は予定にはのっているものの，TeV級の電子リニアコライ

ダー，ミューオンコライダー，$\sqrt{s} \gtrsim 100$ TeV のスーパーハドロンコライダーの早期建設が望まれる.

参考文献

1) P. Langacker : *Phys. Rep.*, **72C** (1981) 185
G.G. Ross : Grand Unified Theories, Benjamin Inc. (1984)
R.N. Mohapatra : Unification and Supersymmetry, Springer-Verlag (1986)
2) H.F. Dylla and J.G. King : *Phys. Rev.*, **A7** (1973) 1224
3) S. Adler : *Phys. Rev.*, **177** (1969) 2426
J. Bell and R. Jackiw : *Nuovo Cimento*, **51A** (1969) 47
4) H. Georgi, H. Quinn and S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974) 451
5) H. Georgi and S.L. Glashow : *Phys. Rev. Lett.*, **32** (1974) 438
6) L.F. Li : *Phys. Rev.*, **D9** (1974) 1723
A. J. Buras *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B135** (1978) 66
7) P. Langacker, 1986 WEIN'86 (Proc. Int. Symp. Weak and Electromagnetic Int. in Nuclei, Heidelberg. p. 879)
8) W. Marciano and A. Sirlin : *Phys. Rev.*, **D22** (1980) 2095 ; *Nucl. Phys.*, **B189** (1981) 442
9) C.H. Llewellyn-Smith *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B177** (1981) 263
10) PDG (Particle Data Group) : *Phys. Rev.*, **D45** (1992) ; **D54** (1996) ; EPJ **C3** (1998)
11) K. Hirata *et al.* : *Phys. Lett.*, **B220** (1989) 308
IMB ; S. Seidel *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 2522, Becker *et al.* : *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2974
M. Shiozawa *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3319
12) A.J. Buras *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B135** (1978) 66
13) L.S. Durkin and P. Langacker : *Phys. Lett.*, **B166** (1986) 436
R.W. Robinett and J.L. Rosner : *Phys. Rev.*, **D25** (1982) 3036
C.N. Leung and J. Rosner : *Phys. Rev.*, **D29** (1984) 2132
U. Amaldi *et al.* : *Phys. Rev.*, **D36** (1987) 1385
G. Costa *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B297** (1988) 244
14) K. Hagiwara *et al.* : *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 815
VENUS ; K. Abe *et al.* : *Phys. Lett.*, **B246** (1990) 297
P. Langacker : *Phys. Rev.*, **D4** (1992) 278
15) CDF ; J. Huth : DPF91, Annual Meet. Am. Phys. Soc., Vancouver, 1991
CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 1463 ; *Phys Rev.*, **D51** (1992) R949
Phys. Rev. Lett., **79** (1997) 2192
16) S. Dimopoulos : CERN-TH.7533/94, Talk given at 27th Int. Conf. on High Energy Physics, Glasgow, July, 1994
Also see P. Langacker *et al.* : *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992) 87

D0 ; S. Abachi *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 3271

17) Y. Nambu : New Trends in Strong Coupling Gauge Theories, 1988 Int. Workshop, Nagoya, Japan, ed. M. Bando, T. Muta, and K. Yamazaki (World Scientific, Singapore) 1989
A. Miransky, M. Tanabashi and K. Yamawaki : *Mod. Phys. Lett.*, **A4** (1989) 1043 ; *Phys. Lett.*, **B221** (1989) 177
W.A. Bardeen, C.T. Hill and M. Lindner : *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 1647

18) レビューとしては，E. Farhi, L. Susskind : *Phys. Rep.*, **74** (1981) 277
最近の発展については
B. Holdman : *Phys. Rev.*, **D24** (1981) 1441 ; *Phys. Lett.*, **B150** (1983) 301
K. Yamawaki *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 1353
T. Appelquist *et al.*: *Phys. Rev.*, **D36** (1987) 508

19) レビュー論文としては，
A. Salam and Strathedee : *Fortschr. Phys.*, **26** (1978) 57
P. Fayet and S. Ferrara : *Phys. Rep.*, **32** (1977) 249
H.P. Niles : *Phys. Rep.*, **110** (1984) 1
H. Haber and G. Kane : *Phys. Rep.*, **117** (1984) 76
"Perspectives on Supersymmetry" in Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 18, ed. G.L. Kane, World Scientific, 1998

20) U. Amaldi *et al.*: *Phys. Lett.*, **260** (1991) 447 をも参照

21) L.E. Ebanez and G.G. Ross : *Phys. Lett.*, **B105** (1982) 439

22) N. Sakai and T. Yanagida : *Nucl. Phys.*, **B197** (1982) 533
J. Ellis, D. Nanopoulos and S. Rudaz : *Nucl. Phys.*, **B202** (1982) 43

23) J. Ellis and D.V. Nanopoulos : *Phys. Lett.*, **B110** (1982) 203
T. Inami and C.S. Lin : *Nucl. Phys.*, **B207** (1982) 533
M. Suzuki : *Phys. Lett.*, **B115** (1982) 40
J. Donoghue and H.P. Nilles and D.Wyler : *Phys. Lett.*, **B128** (1983) 55
R. Barbieri and G. Gatto : *Phys. Lett.*, **B110** (1982) 211
B.A. Campbell : *Phys. Rev.*, **D28** (1983) 209

24) L.E. Ibanez : *Phys. Lett.*, **B118** (1982) 73 : *Nucl. Phys.*, **B218** (1983) 514
K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and S. Takeshita : *Prog. Theor. Phys.*, **68** (1982) 927, **71** (1984) 413
A.H. Chamseddinne, R. Arnowitt and P. Nath : *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1983) 970
J. Ellis, D.V. Narroponlos and H.P. Nilles : *Phys. Lett.*, **B125** (1983) 457

25) R. Arnowitt and P. Nath : SSCL-Preprint-503, CTP-TAMU-52/93, Lectures at VII J.A. Swieca Summer School, Campos do Jordao, Brazil, 1993
G. Kane, C. Kolda, L. Roszkowski and J. Wells : *Phys. Rev.*, **D49** (1994) 6173

26) M. Dine, A.E. Nelson : *Phys. Rev.*, **D48** (1993) 1277
H. Dine, A.E. Nelson and Y. Shirman : *Phys. Rev.*, **D51** (1995) 1362
H. Dine, A.E. Nelson, Y. Nir and Y. Shirman : *Phys. Rev.*, **D53** (1996) 2658

27) S. Dimopoulos, S. Thomas, J. D. Walls : *Nucl. Phys.*, **B488** (1997) 39

28) S. Dimopoulos, M. Dine, S. Raby and S. Thomas : *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 3494

29) S. Deser and B. Zumino : *Phys. Rev. Lett*., **38** (1977) 1433
E. Cremmer *et al.* : *Phys. Lett*., **B79** (1978) 231

30) OPAL ; K. Acker Staff *et al*. : EPJ **C4** (1998) 47
ALEPH : R. Barate *et al*. : *Phys. Lett*., **B407** (1997) 377
L3 ; Adrian *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **236** (1993) 1

31) DELPHI ; P. Abreu *et al*. : EPJ **C1** (1998) 1
OPAL ; K. Ackerson *et al* . : EPJ **C2** (1998) 213
ALEPH : R. Barate *et al*. : EPJ **C2** (1998) 417

32) D0 ; B. Abbott *et al* : *Phys. Rev. Lett*., **80** (1998) 442

33) J. Ellis *et al*. : *Phys. Lett*., **B388** (1996) 97, **B394** (1997) 354

34) CDF ; F. Abe *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **69** (1992) 3439, *ibid*. **76** (1996) 2006, *Phys. Rev*., **D56** (1997) R1357, DO ; S. Abachi *et al* : *Phys. Rev. Lett*., **75** (1995) 618

6
アクシオン

アクシオンとは，1977年にいわゆる強いCP問題 (strong CP problem) の解決策として提案された粒子である[1]．非常に軽くて (数十eV～10^{-6}eV)，物質とは非常に弱くしか相互作用せず，数々の探索実験にもかかわらず未だに発見されていない粒子である．長年の探索努力の結果，アクシオンのパラメター (質量と結合定数) の残されている許容範囲はかなり絞られてきた．アクシオンの存在理由の背景には軸性ベクトル異常，θ 真空，インスタントンなどの理論的諸問題が複雑に絡んでいる．また，アクシオン自身が，ニュートリノ，超対称粒子と並んで宇宙暗黒物質の最有力候補の一員であり，宇宙論の中でも重要な地位を占めるなど，アクシオン問題は，多少のスペースをさく価値のあるトピックである．

θ 真空，インスタントンなどは非摂動論的内容を含み，これまでに解説してきた摂動論的取扱いとは異質の概念である．したがって，以下では多少回り道にはなるが，まず，ソリトンとは何かという物理的概念を把握することから始めて，トポロジー保存量 (巻つき数) の導入，4次元ユークリッド空間でのソリトンとしてのインスタントンおよびその物理的意味と θ 真空との関わりを述べる．次に，θ 真空とカイラル異常項との関連を述べる．これらは理論的テーマとしてはおもしろいが，アクシオンの現象論とは直接関わりはないので，現象にのみ興味ある人は，§6.1，§6.2を飛ばして直接§6.3から始めてもらって結構である．

6.1 ソ リ ト ン[2,3]

6.1.1 1+1 次元のソリトン

ソリトン (solitary wave) とは簡単にいえば，空間的に局在しかつ時間的に安定な波のことをいい，通常，非線形波動方程式の非摂動解として現れる．通常の線形波動方程式に従う波が分散をもち（周波数 ω，波数 k，定数 m として，$\omega^2=k^2+m^2$ を満たす），時間とともにいずれは形を崩すのに対して本質的に安定であるという特徴をもつ．ソリトンの物理的描像を理解するために，手はじめにまず 1+1 次元の古典的なスカラー場の方程式を考察する．

a. ソリトンの存在条件

次のようなラグランジアン密度を考える．

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-V(\phi) \tag{6.1}$$

ここで，$x^\mu=(t;x)$ で，$V(\phi)$ は非線形なポテンシャルを表す．$V(\phi)$ は，極小値を少なくも一つ以上もち，かつ最小値は $V=0$ になるように適当に定数を調整しておくものとする．運動方程式に必ずしも静的解があるとは限らず，また静的でない解もありうるが，簡単のためここでは静的な解のみを考えることにしよう．静的解として $\phi=f(x)$ が見つかれば，時間に依存する解はローレンツ変換して得られる．すなわち，

$$\phi=f(\xi),\qquad \xi=\gamma(x-vt) \tag{6.2}$$

が望む解となる．$\gamma=(1-v^2)^{-1/2}$ はローレンツ因子である．静的な解の満たす運動方程式はハミルトンの原理より，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{6.3}$$

エネルギー密度 $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H}(\phi)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+V(\phi) \tag{6.4}$$

全エネルギーは，

$$E(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathscr{H}(\phi(x))=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xV(\phi(x)) \tag{6.5}$$

で与えられる．全エネルギー第2式の正当化は後述の (6.7) で行う．

ソリトン解が存在すれば，その解は有限なエネルギーをもたねばならず，したがってエネルギー密度は空間的に局在していなければならない．(6.4), (6.5) を見れば，$x\to\pm\infty$ で ϕ が，$\partial\phi/\partial x=V(\phi)=0$ を与えるような ϕ になっていなければならないことがわかる．次に，ソリトンが存在しうるための $V(\phi)$ の形を考察してみよう．このために，運動方程式 (6.3) が，$x\to t$, $\phi\to x$, $V\to -V$ の置き換えを行えば，質量 $m=1$ とおいたニュートン力学のポテンシャル問題に帰着することに注目する．V が $\phi=\phi_0$ で最小値を一つだけもつときは，反転ポテンシャルは図 6.1 の形をしている．境界条件は，$x\to\pm\infty$ で $\phi=\phi_0$ になることを要求するが，$x=-\infty$ からスタートするとして，ϕ が少しでも ϕ_0 の位置から外れれば ϕ は逆転ポテンシャルの坂を転げ落ちてしまうので，$x\to+\infty$ で $\phi=\infty$ または $-\infty$ になるしか行き場がない．したがって，$\phi=\phi_0$ に留まって静止している以外の解は存在しない．

一方，$V=0$ を与える最小値が2個以上存在すればどうなるか．例えば，V が自発的に対称が破れるヒッグスポテンシャルと同じ W 字形をしていたとしよう (図 6.2 (a))．

$$V(\phi)=\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-v^2)^2 \tag{6.6}$$

この場合の反転ポテンシャルは，図6.2 (b) の形をしている．このとき，$x\to-\infty$ で $\phi=-v$ であったとし，x の増大に伴い ϕ を右方に動かしたとき，

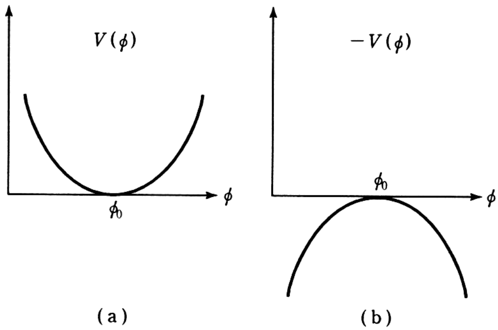


図 6.1　最小値が1個あるときのポテンシャル (a) と逆転ポテンシャル (b)

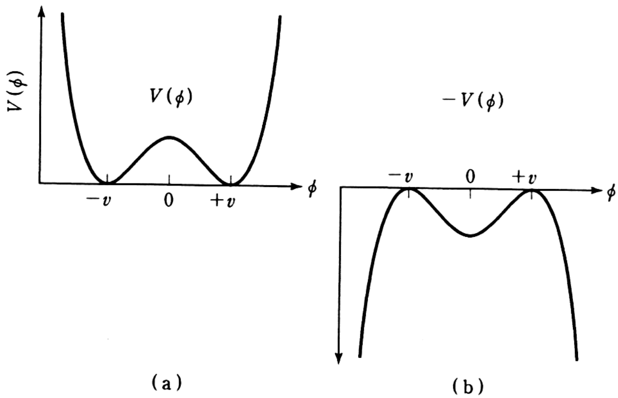


図 6.2 自発的に対称性が破れたポテンシャル (a) と反転ポテンシャル (b)

$x\to+\infty$ で $\phi=v$ になる解が存在する．逆の解 ($\phi=v\to-v$) も存在する．この場合，ϕ は漸近的に $\phi=v$ に到達するのであって，決して $\phi=-v$ にもどることはないし，$\phi=v$ を超えていくこともない．以上の考察から，ソリトン解が存在するためには，少なくも 2 個以上の縮退した真空の存在が必要であることがわかる．このことは，自発的対称性の破れとソリトンの存在は密接に結びついていることを示唆する．

上記のような境界条件が設定されたときの (6.3) の一般解は直ちに求められる．$\partial\phi/\partial x$ を両辺に掛けて積分すれば，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2=V(\phi) \tag{6.7}$$

$x\to-\infty$ で $\partial\phi/\partial x$，$V(\phi)=0$ であるので，積分定数はともに 0 である．これから，

$$x=x_0\pm\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} \tag{6.8}$$

この式を使えば，ポテンシャル V が (6.6) で与えられたとき，2 個のソリトン解が存在することを示せる (演習 6.1).

演習 6.1　$V(\phi)$ が (6.6) で与えられるとき，$v^2=m^2/\lambda$ として，ソリトン解は

$$\phi(x)=\pm v\tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right],\qquad E=\frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \tag{6.9}$$

で与えられることを示せ．

b. サイン-ゴードン方程式

縮退した真空が無限にある例として，次のサイン-ゴードン方程式を考察する．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+a\sin b\phi=0 \tag{6.10}$$

この方程式を与えるポテンシャルは，

$$V(\phi)=\frac{a}{b}(1-\cos b\phi) \tag{6.11}$$

で，図 6.3 (a),(b) のような形をしていて，

$$\phi=\frac{2\pi n}{b}, \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots \tag{6.12}$$

で与えられるところに無限個の縮退した真空状態をもつ．解は (6.8) を使え

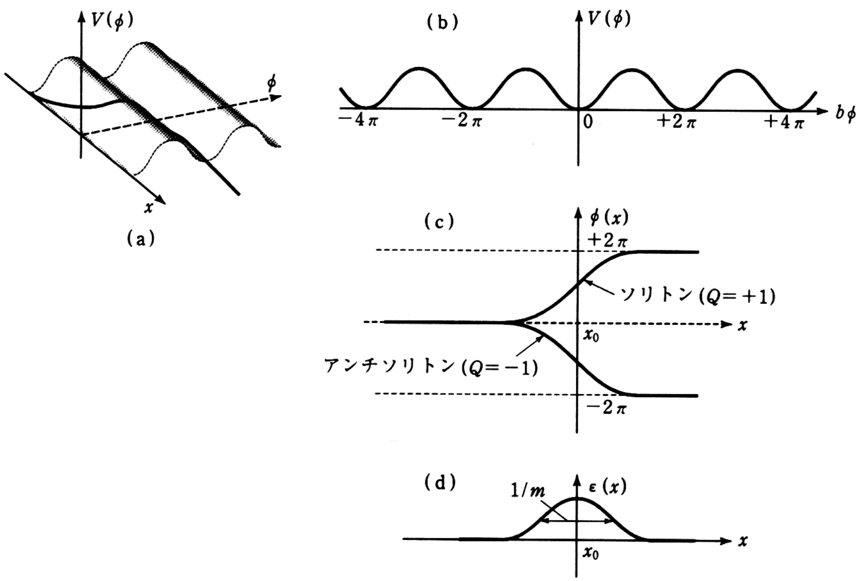


図 6.3 (a)　サイン-ゴードン方程式 $V(\phi)$ を $x-\phi$ 面の立体鳥瞰図として表す．太線は図 (c) の $Q=+1$ のソリトン解
(b)　ϕ-$V(\phi)$ 面での切り口
(c)　x-ϕ 面への投影図．$\phi=0$ から $b\phi=\pm2\pi$ へいくソリトン解
(d)　ソリトンのもつエネルギー密度分布

ば直ちに求められて,

$$\phi(x)=\frac{4}{b}\tan^{-1}\exp(\pm\sqrt{ab}\,x) \tag{6.13}$$

定数 a, b の物理的意味を見るために, $V(\phi)$ を $\phi=0$ のまわりに展開すれば

$$V(\phi)=\frac{ab}{2}\phi^2-\frac{ab^3}{4!}\phi^4+\cdots \tag{6.14}$$

となるので, $m^2=ab$, $\lambda=ab^3$ とおけば, これは質量 m, 自己相互作用結合定数 λ をもつ場と解釈できる. いま, $x\to-\infty$ で一つのゼロ点 (例えば $n=0$) から, $x=+\infty$ で他のゼロ点 (例えば $n=\pm1$) に向かい, 途中, $x=x_0$ で $\phi(x)=\pi m/\sqrt{\lambda}$ となるような境界条件を設定したときの解は,

$$\phi_{\pm1}(x)=\pm\frac{4m}{\sqrt{\lambda}}\tan^{-1}e^{m(x-x_0)} \tag{6.15}$$

で与えられる. これを図 6.3 (c) に描いた.

ソリトンのもつエネルギー密度分布 (図 6.3 (d)) を眺めれば, $x=x_0$ はソリトンの存在位置, $1/m$ がソリトンの空間的大きさを示すことがわかる. ϕ_{+1} と ϕ_{-1} はいろいろな意味で, 粒子と反粒子の性質をもつ. このソリトンのもつエネルギーは, (6.5) より容易に計算できて

$$E=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,V(\phi(x))=\left[\frac{2a}{b}\right]^{1/2}\int_0^{2\pi/b}[1-\cos(b\phi)]^{1/2}\mathrm{d}\phi$$

$$=8\left[\frac{a}{b^3}\right]^{1/2}=\frac{8m^3}{\lambda} \tag{6.16}$$

ϕ の形, ϕ のもつエネルギーは, 結合定数 λ が 0 になる極限で発散することを示す. すなわち, 結合定数がどんなに小さくとも非線形解としてのソリトンが存在するわけであり, 摂動的に得られる解ではない. ソリトンが安定なのは, 二つの異なる真空にまたがっているからである (図 6.3 (a) を参照). エネルギーは, 有限な領域に集中しているが, 一つの解を連続的に変形して他の解に変換するには無限のエネルギーを必要とするのである.

このことを直観的に理解するには次のような単純なモデルを考えればよい. 非常に (無限に) 長いすだれを高いところから吊し, 上端と下端を固定する. $n=\pm1$ の真空は, すだれを右巻き ($n=0\to1$) もしくは左巻き ($n=0\to-1$) にひとひねりした状態に相当し, キンク (kink) と呼ばれる (図 6.4). すだれ

をゆさぶれば，このひねりは蛇行する波となるが，明らかにこの状態は安定であり，ひねっていない状態（$n=0$ の真空）に崩壊することはできない．ソリトンが安定なのは，トポロジー（空間的構造）のもつ性質によるのである．

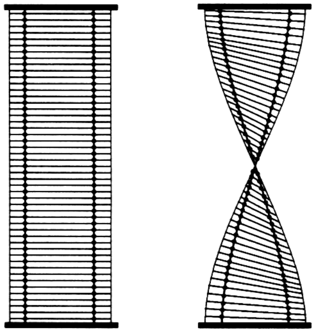


図 6.4 キンク：長いすだれを一巻きした状態は別の真空をつくる．

上の議論は整数の差で表される保存量 Q（トポロジー荷：topological charge）の存在を示唆する．次式で定義される保存カレント $J^{\mu}(\mu=0,1)$ を考えよう．

$$J^{\mu}=\frac{b}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi, \qquad \varepsilon^{\mu\nu} \text{ は反対称テンソルで } \varepsilon^{01}=1 \tag{6.17}$$

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}J^{0}\mathrm{d}x=\frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x=\frac{b}{2\pi}[\phi(\infty)-\phi(-\infty)]=N \tag{6.18}$$

このカレントは，ラグランジアンの対称性から得られるものではなく，ネーターカレントではない．その保存性はトポロジーすなわち境界条件の相違から発生したものであることを認識しておく必要がある．(6.15) の二つの解は $Q=\pm1$ のソリトンと反ソリトンに対応することがわかる．ソリトンの安定性はトポロジー荷の保存といいかえることができる．

6.1.2 1+2 次元のソリトン：うず糸

前節の議論を 1+2 次元空間における複素スカラー場に拡張してみよう．ラグランジアンは

$$\mathscr{L}=\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^{2}-|\nabla\phi|^{2}-V(\phi) \tag{6.19}$$

であり，$V(\phi)$ としては，(6.6) を2次元に拡張したものを採用するものとする．$V(\phi)$ の形から，境界条件として

$$\phi = v\mathrm{e}^{-i\alpha(\theta)}(r \to \infty) \tag{6.20}$$

を満たす静的解を探してみよう．ϕ が微分方程式を満たすためには連続であるという条件が必要であるから，

$$\phi(2\pi) = \phi(0) \tag{6.21 a}$$

すなわち，

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.21 b}$$

$$\alpha(\theta) = n\theta + \alpha_0 \tag{6.21 c}$$

である．$r \to \infty$ でのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = \frac{n^2v^2}{2r^2} \tag{6.22 a}$$

であるので，全エネルギー

$$E = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathcal{H} \tag{6.22 b}$$

は対数発散する．実際，超流動ヘリウム液体のうず糸はこのような数学の式で表される．うず糸のもつ単位長さあたりのエネルギー密度は容器の大きさ L に対して $\ln L$ の依存性をもつ．ゲージ理論では L は常に無限大にもっていくので，前節で得られたようなソリトン解は2次元空間にそのまま拡張することはできないことがわかる．そこで，ゲージ場を付加し，微分を共変微分に変えてみよう．ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \tag{6.23 a}$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu \tag{6.23 b}$$

と変わる．これはよく知られている2次元空間での超伝導状態を表すギンツブルグ-ランダウの自由エネルギーの式となっている．いま，$\alpha(\theta) = n\theta$ とし，ゲージ場を $r \to \infty$ で，

$$A^0 = 0, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{1}{e}\nabla(n\theta) = \boldsymbol{e}_\theta\frac{n}{er} \tag{6.24}$$

の形に選ぼう．これは全微分の形をしておりゲージ変換で消せる量である．逆にいうと真空からゲージ変換で得られるゲージ場である．このような場を“純

粋ゲージ場”という．純粋ゲージ場は $F_{\mu\nu}=0$ を満たす．上記の純粋ゲージ場に対して

$$D_\theta\phi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+ieA_\theta\phi=0, \qquad D_r\phi=0 \tag{6.25}$$

が成立する．静的な解では，$\mathscr{H}=-\mathscr{L}$ であるので，(6.23) を参照すれば，$r\to\infty$ で，$\mathscr{H}\to 0$ であり，全エネルギーは有限となり，ソリトン解が存在しうることがわかる．

この問題を z 方向に一様性のある 3 次元問題として見直してみよう．そうすると磁束が存在しうる．なぜなら，$r=0$ を囲む十分大きな円 $(r=R)$ の中の全磁束を計算すると

$$\Phi=\int_{r\leq R}B_z\mathrm{d}S=\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_0^{2\pi}A_\theta r\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi n}{e}\neq 0 \tag{6.26}$$

すなわち，$r\simeq 0$ の近傍で

$$B=B_z=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\{rA_\theta(r)\}\neq 0 \tag{6.27}$$

この場合，A_μ は $r=0$ を含む近傍で純粋ゲージ場ではあり得ない．式 (6.24) は，$r\to\infty$ で成り立つ式であり，このままでは $r=0$ が特異点であるので連続の条件を満たさない．また (6.25) から，$r\to 0$ で $\phi\to 0$ もまた成立しなければならない．したがって，実際に実現される物理条件に合わせるためには，$r\simeq 0$ で $O(r^2)$, $r\to\infty$ で 1 になるような連続有限の関数が $A(r)$ にかかっていると考えなければならない．$\phi=0$ は真空でないから，ソリトンが有限なエネルギー密度をもつ領域が存在する．このソリトンの磁束は，(6.26) により量子化されることがわかる．3 次元空間で考えて磁束のうず巻きが直線上に z 方向に伸びていても，単位長さあたり有限なエネルギーをもっていて，場は z 方向に一様であるとすれば，上記の解は 2 次元問題にそのまま適用できる．スカラー場の存在を別にすれば，これはII-§2.2 で議論したアハロノフ-ボーム効果におけるソレノイド磁場と同じである．ポテンシャル $V(\phi)$ は自発的に対称の破れたスカラー場を表し，ϕ は物理的には超伝導における凝縮クーパー対の波動関数に対応する．第 2 種の超伝導体では，磁束が強いときマイスナー効果が完全には働かず，磁束が超伝導体を貫く現象が知られていて，アブリコソフ (Abrikosov) の磁束線と呼ばれる．磁束が実際に量子化されていることも

実証されている.

上記のラグランジアンから導かれる運動方程式の正確な解析解は発見されていないが,

$$\phi=\chi(r)e^{in\theta},\quad \chi(r)\to 0(r\to 0),\quad \chi(r)\to v(r\to\infty) \tag{6.28}$$

という条件を満たし，かつ $\chi(r)\fallingdotseq v$ のときの近似解は知られている[4].

$$A_\theta=-\frac{n}{er}-\frac{c}{e}K_1(evr)\xrightarrow{r\to\infty}-\frac{n}{er}-\frac{c}{e}\left[\frac{\pi}{2evr}\right]^{1/2}e^{-evr} \tag{6.29 a}$$

$$B_z=c\chi(r)K_0(evr)\xrightarrow{r\to\infty}\frac{c}{e}\left[\frac{\pi v}{2er}\right]^{1/2}e^{-evr} \tag{6.29 b}$$

$$\chi(r)\overset{r\to\infty}{\simeq}v(1-e^{-\sqrt{-m^2}}),\qquad -m^2=2\lambda v^2 \tag{6.29 c}$$

K_0, K_1 は変形ベッセル関数である．図 6.5 に B と ϕ の形を描く．磁束が超伝導体に侵入する深さ δ は，$\delta\sim 1/ev$ で与えられる.

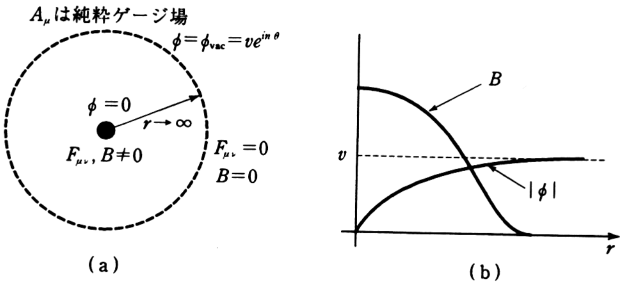


図 6.5 2 次元超伝導体内の磁束ソリトン B とスカラー場 ϕ (クーパー対凝縮体) の空間的分布．侵入の深さ $\delta\sim 1/ev$ である.

6.1.3 巻つき数 (winding number)

上で議論した真空は，$\phi=v\exp(-i\alpha)$ の形をしており，連続変換で互いに一致させられるように見える．それならばソリトンはなぜ安定なのであろうか．この理由は，キンクが安定であった理由とまったく同じであり，真空配位の違いがやはりトポロジーに基づくのである.

a. $U(1)$

上の例では，真空における場 ϕ の条件 (6.20) は，$U(1)$ 群の表現となって

おり，真空を表す時空から群の表現空間への射影を表す式である．真空条件を課す時空の領域は，2 次元空間の球（半径 $r\to\infty$）の境界，すなわち円 (S^1) である．時空変数として角変数 θ を使えば，ϕ の連続条件から，$\theta=0$ と $\theta=2\pi$ が同一点でなければならない．表現群の空間もまた円 (S^1) を構成するので，この射影を

$$S^1\ (\text{時空}) \longrightarrow S^1(U(1))$$

のように書く．群の変数 $\alpha(\theta)$ は例えば $\alpha(\theta)=n\theta+\beta(\theta)$ と表される．$\beta(2\pi)=\beta(0)$ を満たすので β は θ の連続関数であり，適当な連続変換で消去できる量であるが，n の異なる α 同士は θ の連続変化で互いに一致させることはできない．この様子は模式的に図 6.6 のように表すことができる．

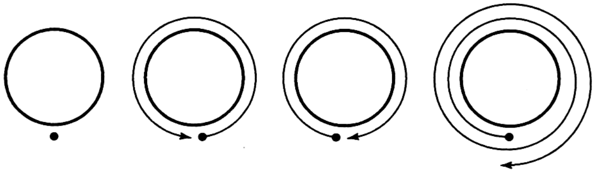


図 6.6　S^1 (時空) → $S^1(U(1))$ 射影のホモトピークラス分け．巻つき数 n により指定される．

すなわち，群の射影が n によって別々のグループ (homotopy class) に分類され，それぞれのグループの中では θ の連続関数となっているが，n が異なるグループへは θ の連続変換では移れない．このとき，真空条件を満たしかつ連続変換では互いに一致させることのできない整数 n で区別される複数の ϕ，すなわち縮退真空が存在する．これを数学用語で

$$\pi_1(s^1)=Z \tag{6.30}$$

と書く（付録 A 参照）．n は巻つき数，数学用語ではポントリャーギン指数といい，群の表現要素で一般的に書くと

$$n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{V_U}\int iU\mathrm{d}U^{-1}=\frac{1}{V_U}\int \mathrm{d}x iU\partial_x U^{-1} \tag{6.31}$$

と表される．UdU^{-1} は群の変数を取り出す操作であり，V_U は群の表現空間の体積である．ここで，時空での S^1 を円でなく，円を 1 カ所で切って伸ばした直線とし無限に長く伸ばしても，両端（$x=-\infty$ と $x=+\infty$）を同一点と見なせば，すなわち，α を x の変数として，U を x で書き直し，$U(-\infty)=$

$U(+\infty)$ を要求すれば，トポロジーとしては同等である．(6.31) の最後の式にある $U\partial_x U^{-1}$ は，群変数 α の x への変換のジャコビアンにほかならない．このような例として

$$U: v(x) = \exp[i\pi x/(x^2+\lambda^2)^{1/2}] \tag{6.32}$$

をあげておく．λ は任意の定数である．この $U=v(x)$ を (6.31) に入れれば $n=1$ を与え，$U=v(x)^m$ を入れれば，$n=m$ を与えることは容易に示せる．

b．$SU(2)$

$SU(2)$ 変換は，一般に

$$U = \exp(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2) = a + \boldsymbol{\tau}\cdot b \tag{6.33}$$

と表される．$a^2+b^2=1$ であるから，これは，4 次元空間の超球表面 S^3 を表し，3 個の角度で表すことができる．トポロジーの議論から，S^3(時空) $\longrightarrow$ $S^3(SU(2))$ の射影はやはり，巻つき数

$$n = \frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3} \mathrm{d}S\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu \mathrm{Tr}[(U\partial_\nu U^{-1})(U\partial_\rho U^{-1})(U\partial_\sigma U^{-1})] \tag{6.34}$$

によるホモトピークラスに分けられることが知られている．n_μ は 4 次元空間に埋め込まれた 3 次元超球面 S^3 における外向き法線ベクトルである．

$U(1)$ のときと同じ議論によって，3 個の角のかわりに $\boldsymbol{r}=(x_1, x_2, x_3)$ を使って，S^3 を 3 次元全空間と見立ててもよい．ただし，このときはすべての無限遠点は同一点と見なさなければならない．このときの U の表式の例として，(6.32) を一般化した

$$v(\boldsymbol{r}) = \exp[i\pi\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r}/(r^2+\lambda^2)^{1/2}] \tag{6.35 a}$$

$$v(\boldsymbol{r}) \longrightarrow 1(|\boldsymbol{r}|\to\infty) \tag{6.35 b}$$

をあげることができる．このとき，$U=v^m$ は巻つき数 m を与える変換である．

6.1.4 ソリトンの存在する時空

デリックの定理[5]　静的ソリトンの存在条件は，1, 2 次元空間の場合についてはすでに扱ったが，$D \geqq 2$ 次元を含めても簡単な議論で次の場合に限られることがわかる．

1 次元：　スカラー場のみ　　　　　(キンクやサイン-ゴードン方程式)

2 次元：　スカラー場＋ゲージ場のみ　(超伝導体の磁束線)

3 次元：　スカラー場＋ゲージ場のみ　(磁気単極子)

4 次元：　純粋ゲージ場のみ　(インスタントン)

証明　D 次元空間の静的解に限る．ヤン-ミルズゲージ場は $A_a{}^0=0$ とするゲージ (temporal gauge) で考える．この場合ハミルトニアンはラグランジアンの符号を変えたものである．

$$H=\int \mathcal{H} \mathrm{d}^D x \tag{6.36 a}$$

$$\mathcal{H}=(D_i\phi)(D^i\phi)^\dagger+F_{aij}F_a{}^{ij}+V(\phi)\equiv K_S+K_A+V \tag{6.36 b}$$

第 1 項はスカラー場の運動エネルギー (ただし空間の共変微分を含む)，第 2 項はゲージ場の運動エネルギー，第 3 項はスカラー場のポテンシャルエネルギーであり，適当に定数を選べば各項はすべて正値をとる．すなわち

$$K_S \geqq 0, \quad K_A \geqq 0, \quad V \geqq 0 \tag{6.37}$$

ϕ, A は運動方程式の解，すなわちハミルトンの原理により ϕ や A の変分に対して，ラグランジアンが極値をとるところとする．このとき $\phi(x)\to\phi(\lambda x)$, $A_i(x)\to\lambda A_i(\lambda x)$ と変換して微分をすませた後，エネルギー積分の変数を $\lambda x\to x$ と置き換えると

$$\mathcal{H}(\lambda)=\lambda^{2-D}K_S+\lambda^{4-D}K_A+\lambda^{-D}V \tag{6.38}$$

を得る．エネルギーは $\lambda=1$ で極小のはずであるから，$\mathcal{H}$ を λ で微分し $\lambda=1$ とおけば

$$(2-D)K_S+(4-D)K_A-DV=0 \tag{6.39}$$

(6.37) の条件を入れると，ゲージ場のないとき ($K_A=0$) は，$D=1$ のみ，スカラー場がないとき ($K_S=V=0$) は，$D=4$ が唯一の解であることがわかる．$D=2, 3$ のときはスカラー場とゲージ場の共存する解がありえることもわかる．　(証明終わり)

トポロジーの議論は非常に一般的であり，ラグランジアンの構造を調べて，ソリトン存在の必要条件を満たすか否かの検定に非常に有用な道具である．

6.1.5 インスタントン

a. $SU(2)$ ゲージ場における縮退真空

インスタントンは上の議論で示した4次元ユークリッド空間での純粋ゲージ場ソリトンである．しかし，インスタントンの議論を始める前に，$SU(2)$ 純粋ヤン-ミルズ場が存在するときの3次元空間での縮退真空の存在を説明しておく必要がある．静的な3次元での真空配位を考慮するには，時間成分 A^0 が0であるようなゲージ（temporal gauge）を採用するのが便利である．これを実現するためのゲージ変換 U は

$$A^0(\boldsymbol{r})=UA^{0\prime}(\boldsymbol{r})U^{-1}-(i/g)U\partial^0U^{-1}=0 \tag{6.40}$$

を解いて得られるが，この条件を課しても，$\partial^0U=0$ であるような時間によらないゲージ変換の自由度 Ω がまだ残っている．真空を，$r\to\infty$ で場のテンソル $G_{\mu\nu}=0$ となる配位とすれば，$r\to\infty$ で，真空をゲージ変換して得られる純粋ゲージポテンシャル

$$A_i(\boldsymbol{r})=\frac{\tau_a}{2}A_{ai}(\boldsymbol{r})=-\frac{i}{g}\Omega(\boldsymbol{r})\partial_i\Omega^{-1}(\boldsymbol{r}) \tag{6.41}$$

も又時間によらない．ここで空間の無限遠方でゲージ場が消滅するという条件

$$\Omega(\boldsymbol{r})\longrightarrow 1 \qquad (r\to\infty) \tag{6.42}$$

を課すと，すべての無限遠点を同一点と見なすことができるから，この3次元空間は，トポロジー的には S^3 と同等となる．(6.41) を S^3 (時空)$\to S^3(SU(2))$ の射影群と見なしたとき，巻つき数 n によって区別できるホモトピークラスに分類できる．数学用語で書けば（付録A参照）

$$\pi_3(SU(2))=Z \tag{6.43}$$

このとき，Ω は n で指定される Ω_n の集合である．すなわち，$\Omega(\boldsymbol{r})=\{\Omega_n(\boldsymbol{r})\}$．これに対応して，ゲージポテンシャルもまた n で指定される．このときの純粋ゲージ場 A_n は，

$$A_{n,i}=(-i/g)\Omega_n\partial_i\Omega_n{}^{-1} \tag{6.44 a}$$

で与えられる．このような変換群で $n=1$ を与える例として，(6.35) に導入した v をあげることができる*1)．このとき，$\Omega_n=v^n$ である．ゲージ変換によっ

*1) $\Omega(\boldsymbol{r})=\dfrac{r^2-\lambda^2+2i\lambda\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2+\lambda^2}$ もよく使われる．

て A_n を A_{n+1} に変えることは可能であり，このゲージ変換が v であることは容易に察しがつく．実際に計算してみると

$$A_{n+1,i}=(-i/g)v^{n+1}\partial_i v^{-n-1}=(-i/g)vv^n\partial_i(v^{-n}v^{-1})$$
$$=vA_{n,i}v^{-1}+(-i/g)v\partial_i v^{-1} \qquad (6.44\,\mathrm{b})$$

であるので，v は真空の巻つき数 n を1だけ変える演算子である．すなわち

$$v|n\rangle=|n+1\rangle \qquad (6.45)$$

以上の議論によって，$SU(2)$ ヤン-ミルズゲージ群が存在するときは，巻つき数 n によって区別できる縮退真空が3次元空間に存在することがわかった．

b. 4次元空間でのソリトンの存在

デリックの定理は，物質場の存在しない純粋ヤン-ミルズ場においては，4次元ユークリッド空間においてソリトンが存在しうること，4次元ユークリッド空間以外には静的ソリトンは存在しないことを示している．また，任意のヤン-ミルズゲージ群におけるソリトンの存在条件は，$SU(2)$ の議論に集約されることが証明されている．つまり，任意のヤン-ミルズ場におけるソリトン解は，部分群として含む $SU(2)$ 群の数だけある．なお，ヤン-ミルズ場に物質場が共存していれば，3次元空間でもソリトン解は存在しうる．ト・フーフト-ポリヤコフのモノポール解[2,3]はその例であるが，モノポールについては改めて次章で詳細に議論する．4次元空間における純粋ヤン-ミルズ場のソリトンは，時間的にも局在していることを意味するから，ト・フーフトによってインスタントンという名を与えられた．ポリヤコフは疑似粒子 (pseudo-particle) と名づけている．

ユークリッド4次元空間にヤン-ミルズゲージ場が存在すれば，自発的に対称性の破れた場がなくともインスタントンが存在しうることは注目に値する．このことが，QCD 議論においてインスタントンを避けて通れない対象としているのである．ユークリッド4次元空間のソリトンは，ミンコフスキー空間では虚数時間でのソリトンを意味する．これについての物理的解釈は後で述べることとし，ここではまず数学的な定式化を行おう．

ユークリッド空間の場の理論は，時空変数が $x^\mu=(x^1, x^2, x^3, x^4=ix^0)$ で表される以外は，すべてミンコフスキー空間の表式と同じようにして表される．

たとえば，作用 S_E は，ミンコフスキー空間の作用 S から，$x^0 \to -ix^4$, $A^0 \to -iA^4$ の置き換えにより，かつ x^4 を実数のように扱って得られる．

$$S_E = -\frac{1}{2}\int d^4x \mathrm{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}\int d^4x G_{a\mu\nu}G_a{}^{\mu\nu} \tag{6.46 a}$$

$$G_{\mu\nu} = G_{a\mu\nu}t_a, \qquad A_\mu = A_{a\mu}t_a \tag{6.46 b}$$

$$G_{a\mu\nu} = \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - gf_{abc}A_{b\mu}A_{c\nu} \tag{6.46 c}$$

t_a は群の生成子表現行列である．ただし，計量は $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (-1, -1, -1, -1)$ であるので，反変テンソルと共変テンソルは，形式的には区別して書くが実際の区別はない．4 次元ユークリッド空間の長さを

$$s \equiv (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2)^{1/2} \tag{6.47}$$

として，$s \to \infty$ でゲージ場が

$$A_\mu \longrightarrow -\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} + O(s^{-2}), \qquad s \to \infty \tag{6.48 a}$$

であれば，

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow 0 + O(s^{-3}), \qquad s \to \infty \tag{6.48 b}$$

であり，ユークリッド空間の作用は有限となるので，ソリトン存在の境界条件を満たす．

ここで，次の量を定義する．

$$\nu = \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \tag{6.49 a}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma} \tag{6.49 b}$$

この被積分関数は，全微分の形に書き直すことができる．

$$\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = \partial_\mu K^\mu \tag{6.50 a}$$

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(A_\nu G_{\rho\sigma} - \frac{2}{3}igA_\nu A_\rho A_\sigma\right) \tag{6.50 b}$$

したがって，ν は

$$\nu = \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x \partial_\mu K^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2}\int_{S^3} dS n_\mu K^\mu \tag{6.51}$$

と書き直せる．ゲージ場が (6.48) の境界条件を満たせば，$s \to \infty$ において，(6.50 b) における第 1 項は積分に寄与せず，ν は (6.34) に与えられた巻つき数 n に一致する*2)．ここでの巻つき数 ν は，4 次元ユークリッド空間での超

球の表面 S^3 から $S^3(SU(2))$ への射影のホモトピークラスを表し，前節で与えた 3 次元空間からの射影による巻つき数 $n(S^3(3\text{ 次元空間}) \to S^3(SU(2)))$ とは別物であることを注意しておく．

上記の境界条件を満たすソリトン解（インスタントン）は見つけられており，一例が次式で与えられる．まず，ゲージ変換 U を次式で定義する．

$$U(x)=\frac{x_4+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r}}{s},\qquad U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)=-\frac{i\Omega_{\mu\nu}x^\nu}{s^2} \tag{6.52 a}$$

ここに，$\Omega_{\mu\nu}$ は反対称テンソルで，

$$\Omega_{\mu\nu}=\begin{cases}\varepsilon^{\mu\nu k}\tau_k & (\mu,\nu=1\sim3)\\ \delta^{\mu k}\tau_k & (\nu=4)\end{cases} \tag{6.52 b}$$

で与えられる．このとき，

$$A_\mu(x)=-\frac{i}{g}\frac{y^2}{y^2+\lambda^2}U(y)\partial_\mu U^{-1}(y)=-\frac{1}{g}\frac{\Omega_{\mu\nu}y^\nu}{y^2+\lambda^2} \tag{6.52 c}$$

$$G_{\mu\nu}(x)=\frac{2}{g}\frac{\lambda^2\Omega_{\mu\nu}}{(y^2+\lambda^2)^2} \tag{6.52 d}$$

はインスタントンとしての条件を満たす．ただし，$y^\mu=x^\mu-a^\mu$ である．a^μ,λ は任意の定数で，それぞれインスタントンの存在場所と大きさを表す．このインスタントン解が境界条件 (6.48) を満たし，次の性質をもつことは，実際に計算をしてみれば証明できる．

○自己共役である．つまり

$$\tilde{G}_{\mu\nu}=G_{\mu\nu} \tag{6.53}$$

○$G_{\mu\nu}$ はヤン-ミルズ場の運動方程式を満たす．

証明には，$D_\mu\tilde{G}^{\mu\nu}$ が恒等的に 0 である（ヤン-ミルズ場の源のない式に等しい）ことを使う．

○巻つき数 ν は 1 である．

○$\nu=1$ のときの作用は

$$S_E=-\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]=\frac{8\pi^2}{g^2} \tag{6.54}$$

○巻つき数 −1 の反インスタントンは，$U\to U^\dagger$，$\Omega_{\mu\nu}\to\bar{\Omega}_{\mu\nu}$（$\bar{\Omega}_{\mu\nu}=\Omega_{\mu\nu}$，$\mu$,

---

*2) アーベルゲージ場においては，A_ν と A_ρ は交換するので，$\nu=0$ になることに注意しておく．

$\nu=1-3$, $\bar{\Omega}_{4\nu}=-\Omega_{4\nu}$) として得られる．

○$\nu=m$ のインスタントンは，$U\to U_m=(U)^m$ とすることにより得られる．

証明：

$$x^\mu=s(\cos\omega,\ \boldsymbol{n}\sin\omega),\qquad \boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

$$0\leqq\omega<\pi,\quad 0\leqq\theta<\pi,\quad 0\leqq\phi<2\pi \qquad (6.55\,\mathrm{a})$$

と極座標を使って書き直せば，

$$U=(x_4+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r})/s=\cos\omega+i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\sin\omega=\exp(i\omega\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}) \qquad (6.55\,\mathrm{b})$$

と書き直せるから，$U\to(U)^m$ は，$\omega\to m\omega$ に等しく，x^μ が S^3 上を1回転するように動けば，任意の回転軸 $\boldsymbol{n}$ について巻つき数は m となる．

c．インスタントンの物理的解釈

さて，インスタントンの物理的解釈を行うために，$s\to\infty$ の境界を変形して，図6.7のような x_4 軸を中心とする円筒形の境界面 (S^c) を考える．ν の表式 (6.49a) はゲージ不変であるから，ここで，$A_4=0$ となるようなゲージ $\bar{A}_\mu(\bar{A}_4=0)$ を採用すれば，円筒の側面からの寄与は式 (6.50) からわかるように必ず A_4 を含み0となる．円筒の上面および下面は，$x_4\to\pm\infty$ での3次元

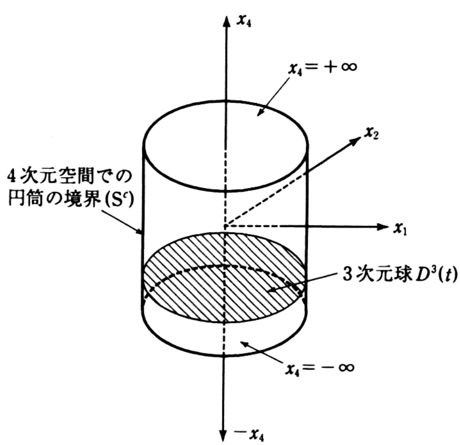


図6.7 インスタントンの巻つき数を決める境界面（4次元空間内の3次元超球面）を円筒形に変形する．x_4 軸を中心とする円筒の上面を $x_4\to\infty$ に，円筒の下面を $x_4\to-\infty$ に対応させる．インスタントンのトポロジー荷の定義される $S^3\to S^3(SU(2))$ の巻つき数$=\nu$ と，真空の定義される3次元空間 $D^3\to S^3(SU(3))$ の巻つき数 $m(x_4=+\infty)$ と $n(x_4=-\infty)$ とは，$\nu=m-n$ の関係にある．

体積でありかつ周縁が $r\to\infty$ に対応するので，先に行った縮退真空の議論がそのまま適用可能で，巻つき数 n をもつ真空配位となっている．

$\bar{A}_4=0$ とする U の解は，(6.40) の式に (6.52) の A_4 の表式を代入すれば得られて，次の式で与えられる[2,3]．

$$U(\boldsymbol{r},x_4)=\exp[i\tau_r F(r,x_4)] \tag{6.56 a}$$

$$\tau_r=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r}/r,\qquad r=|\boldsymbol{r}| \tag{6.56 b}$$

$$F(r,x_4)=\frac{r}{\sqrt{r^2+\lambda^2}}\left[\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{x_4}{\sqrt{r^2+\lambda^2}}\right] \tag{6.56 c}$$

この U は，$x_4\to+\infty$ で先に議論した (6.35) の v に一致し，$x_4\to-\infty$ では 1 になることがわかる．

$$U(\boldsymbol{r},-\infty)=1,\qquad U(\boldsymbol{r},+\infty)=v(\boldsymbol{r}) \tag{6.57}$$

また，このとき，$x_4=\pm\infty$ で，巻つき数 n に対応する $\bar{A}_{n,i}$ が，(6.44) で与えた $A_{n,i}$ になることも示せる．すなわち，

$$\bar{A}_4(x_4)=0,\quad (\text{すべての } x_4) \tag{6.58 a}$$

$$\bar{A}_i(x_4=\infty)=(-i/g)v^{n+1}\partial_i v^{-(n+1)} \tag{6.58 b}$$

$$\bar{A}_i(x_4=-\infty)=(-i/g)v^{n}\partial_i v^{-n} \tag{6.58 c}$$

このとき，ν は

$$\begin{aligned}\nu&=\frac{g^2}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]=\frac{g^2}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu K^\mu\\&=\frac{g^2}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^3x\,K^4\Big|_{x_4=-\infty}^{x_4=\infty}=(n+1)-n=1\end{aligned} \tag{6.59}$$

一般に巻つき数 ν のインスタントンが存在した場合は，$x_4=\pm\infty$ での 3 次元空間の真空の巻つき数を m, n として

$$\nu=m-n \tag{6.60}$$

が成立する．

これから，インスタントンは，$x_4=-\infty$ での真空の巻つき数 n を，$x_4=+\infty$ で m に変える働きをし，その差が ν で与えられることがわかる．すなわちインスタントンの存在は，異なる巻つき数をもつ真空への遷移を意味する．

d. 虚 数 時 間

古典力学では，粒子のもつエネルギー E より高いポテンシャル障壁 V に衝突すると跳ね返されて，障壁を越えることはできない．量子力学ではトンネル

効果により，障壁を越える確率が存在する．粒子は進行波により表され，波数 $p=[2m(E-V)]^{1/2}$ をもち，場所による依存性は $\exp(ipx)$ である．$V>E$ のところでは波数が虚数となり，$p=i[2m(V-E)]^{1/2}$ となり減衰波を表す．ポテンシャル障壁を越える遷移振幅は，半古典的取扱いの WKB 手法によると，

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b[2m(V-E)]^{1/2}\mathrm{d}x\right\}\equiv\exp(-S_E) \tag{6.61}$$

一方，$E>V$ のときに，a から b にいたる道筋の作用 S を評価してみよう．全エネルギー E が 0 になるように規格化すると，

$$\hbar S=\int_{t_a}^{t_b}L\mathrm{d}t=\int(K-V)\mathrm{d}t=\int 2K\mathrm{d}t=\int p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_a^b p\,\mathrm{d}x \tag{6.62}$$

となり，これは，(6.61) の S_E とは $E-V$ の符号が変わるのみである．一方，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-V \tag{6.63}$$

で与えられるが，虚数時間 $x_4=it$ を導入することとポテンシャルを反転することとは同等である．したがって，(6.61) で定義された S_E は，虚数時間での作用に等しい．場の理論ではユークリッド空間での作用となる．すなわち，ユークリッド空間でのラグランジアンの経路積分

$$\exp(-S_E)=\exp\left[-\int\mathscr{L}\right] \tag{6.64}$$

が，その経路の遷移振幅を与える．WKB 法の結果を使わず虚数時間の作用を使うのは場の理論での一般化が容易だからである．量子場の理論では，遷移振幅を計算するのに経路積分の方法を使うことが多い．経路積分は可能なすべての経路について積分しなければならないが，古典的な経路（作用を最小にする経路）を大きく離れた経路の寄与は通常小さく，半古典的な計算でよい近似である．

インスタントンの作用積分は，すでに (6.54) で求めた．

$$S_E=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]=\frac{8\pi^2}{g^2} \tag{6.65}$$

したがって，巻つき数の異なる真空への遷移確率は，

$$\mathrm{e}^{-8\pi^2/g^2}=\mathrm{e}^{-2\pi/\alpha_s} \tag{6.66}$$

の程度である．QCD の場合これは決して小さい数ではない．

インスタントンは，空間的にも時間的にも局在している状態を記述するが，ミンコフスキー空間のソリトンではないので，いわゆる粒子ではない．インスタントンが存在すると，そこには巻つき数の異なる真空へ通じる道があり，遷移の起きる可能性が生じることがわかる．しかし，ポテンシャル障壁のため，遷移確率は，$\nu=1$ のインスタントン 1 個当たり $\exp(-8\pi^2/g^2)$ 程度であるということが結論づけられる．

しかし，インスタントンは通常の粒子に似た性質をもつ側面もある．粒子と同じくインスタントンは多数存在しうる．非常に多数存在して，なおかつインスタントン間の平均距離がインスタントンのサイズに比べて大きいとき，インスタントンの希薄ガスということにする．さらに多数存在して平均距離が短くなり，インスタントンのサイズと同程度になると相関がでてきて液体のように振る舞うであろう．このようなインスタントン媒体が存在するときの物質の状態（インスタントン相）は，カイラル対称性の自発的破れと密接に関連すると議論されている[6]．

6.1.6 θ 真空

さて，インスタントンの存在により，巻つき数 n の異なる真空間の遷移がありうることがわかった．このことは，真空が n の異なる真空の重ね合わせ状態であることを示す．先の議論で，$\Omega=v$ (6.35) は，真空に演算すると，n を 1 だけ変えることを見た（(6.45) 参照）．

$$\Omega|n\rangle=|n+1\rangle \tag{6.67}$$

すなわち真空は一般にはゲージ不変でない．ただし，ゲージ不変な真空は次のようにして容易につくれる．これを θ 真空という．

$$|\theta\rangle=\sum_n \mathrm{e}^{-in\theta}|n\rangle \tag{6.68}$$

$$\Omega|\theta\rangle=\sum_n \mathrm{e}^{-in\theta}|n+1\rangle=\mathrm{e}^{i\theta}|\theta\rangle \tag{6.69}$$

任意の θ の値に対し，θ が異なれば違う真空を与える．つまり θ の異なる真空はまったく別の世界を構成し交わることがない．これを見るために，ゲージ不変な場の演算子の伝播関数の期待値を計算してみる．

$$\langle G\rangle=\langle\theta|T(J_1\cdots J_p)|\theta'\rangle=\sum e^{i(m\theta-n\theta')}\langle m|T(J_1\cdots J_p)|n\rangle \tag{6.70 a}$$

J_i はゲージ不変であるから，$\Omega^{-1}T(J_1\cdots J_p)\Omega=T(J_1\cdots J_p)$ が成立せねばならず，このことは，上式右辺が $\nu=m-n$ にのみ依存することを示す．したがって，

$$\begin{aligned}\langle G\rangle&=\sum e^{im(\theta-\theta')}\sum e^{i\nu(\theta+\theta')/2}F(\nu)\\&=2\pi\delta(\theta-\theta')\sum e^{i\nu\theta}F(\nu)\end{aligned} \tag{6.70 b}$$

すなわち，ゲージ不変な摂動では θ は変えられないことを意味する．θ 真空は外の世界とは相互作用しないので，θ を決める手段はない．θ 真空が存在する場合の一般的な遷移振幅は

$$\langle\theta_{\text{out}}|\theta_{\text{in}}\rangle=\sum e^{i(m-n)\theta}\langle m_{\text{out}}|n_{\text{in}}\rangle=\sum e^{i\nu\theta}\{\sum\langle(n+\nu)_{\text{out}}|n_{\text{in}}\rangle\} \tag{6.71}$$

であるので異なった巻つき数をもつ真空間の遷移の和となる．しかも，各遷移には $\exp(i\nu\theta)$ という位相因子がかかることがわかる．この効果は，ラグランジアンに次の $\mathcal{L}_\theta$ を付加することにより自動的に取り入れられることが，経路積分の方法を使えば容易に証明できる．

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}=\mathcal{L}+\mathcal{L}_\theta=\mathcal{L}+\theta\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \tag{6.72}$$

すなわち，θ 真空なる複雑な内容の真空が存在し，θ なる余分のパラメターが理論の中に入ってきた．

θ 真空とは，上記の (6.68) で与えられる真空であるが，θ の値如何にかかわらず一般に存在しうるものである．$\mathcal{L}_\theta$ は $\theta\neq0$ のときに，$\theta=0$ の遷移振幅を θ 真空間の振幅に転換するための付加項である．

6.2 強い相互作用における CP の破れ

6.2.1 異　常　項

QCDには，本来のカラー $SU(3)$ 対称のほかにさまざまの対称性が内在する．例えば，u クォークと d クォークの質量が 0 と見なせる極限では，$U(2)_L\times U(2)_R$ グローバル対称が成立する[*3)]．このベクトル部分 $U(2)_{R+L}=U(1)_{R+L}\times$

*3) m_s を無視する $SU(3)_{\text{flavor}}$ 対称性がよい近似であるときは $U(3)\times U(3)$ 対称になる．ここでは，$U(2)\times U(2)$ に話を限る．

$SU(2)_{R+L}$ に対応する保存量は，バリオン数と強い力のアイソスピンであり，自然界ではかなりの精度で実現している．しかし，軸性ベクトル部分の $U(1)_{R-L}\times SU(2)_{R-L}$ は，m_u，$m_d\neq 0$ なる事実により破れている．

一般的にいって，対称性の破れ方には次のような種類がある．

(1)　対称性をあらわに破る．対称性を破る項（しばしば摂動）をラグランジアンに付加する．例えば，QCD ラグランジアンに電磁相互作用を付加したり，u クォークと d クォークの質量差を導入することにより，アイソスピン対称が破れるのはこの例である．

(2)　対称性が隠される，あるいは自発的に破れる．ラグランジアンは対称性をもつにもかかわらず基底状態（真空）が対称性を破り，実現される物理現象に対称性が見えない．これには電弱相互作用のように，スカラー粒子を導入して真空期待値を期待値をもたせることにより対称性を破る場合と，相互作用の結果力学現象として対称性が破れる場合がある．QCD においては，クォーク対が凝縮して実効的にヒッグス粒子を形成し，$SU(2)_{R-L}$ のカイラル対称を破る．

(3)　異常項により破れる．ラグランジアンが対称性をもち，古典的な考察では現れないにもかかわらず量子効果を導入すると対称性が破れる例である．QCD に現れる $U(1)_{R-L}$（軸性という意味で以下 $U_A(1)$ と記す）対称性の破れはこの例で，以下の議論の対象である．

下記のカイラル変換

$$q \longrightarrow q'=\mathrm{e}^{-i\alpha\gamma^5}q, \qquad q^{\dagger} \longrightarrow q^{\dagger\prime}=q^{\dagger}\mathrm{e}^{i\alpha\gamma^5} \tag{6.73}$$

を考える．カイラル変換とは，$\gamma^5 q_R=q_R$，$\gamma^5 q_L=-q_L$ を考慮すると，通常の位相変換が，右巻きと左巻き粒子の位相を同方向に回転するのに反し，逆方向に回転する演算である．微小カイラル変換，$\delta q=-i\delta\alpha\gamma^5 q$ を行うときのラグランジアンの変化量は，

$$\delta\mathscr{L}=\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\right]\delta q+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta q\right] \tag{6.74 a}$$

で与えられる．第 1 項はオイラーの運動方程式で 0 になり，第 2 項は

$$\delta\alpha\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) \tag{6.74 b}$$

を与える．質量項（$\mathscr{L}_{\rm mass}\sim m\bar{q}q$）が存在しないときは，QCD ラグランジアン

はこの変換で不変であるので（後述§6.2.2），保存するネーターカレント $J_5{}^\mu$

$$\partial_\mu J_5{}^\mu = \partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) = 0$$

が存在し，軸性電荷（axial charge）

$$Q_5 = \int J_5{}^0(x)\mathrm{d}^3x \tag{6.75}$$

という保存量が定義できる．場の量子論では Q_5 は軸性変換（6.73）の生成演算子である．クォーク質量があると，すぐ後に述べるようにカイラル対称は成り立たなくなるので，以下の議論は特に必要ない限りは，クォークの質量を0として扱う．

さて，以上はラグランジアンレベルでの話である．量子補正項を考慮すると，三角図（第5章，図5.2参照）からの寄与が0にならないことが示せる．これは最初に $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 遷移の研究過程において発見され，アドラー-ベル-ジャッキュー（Adler-Bell-Jackiew）のカイラル異常項と呼ばれた[7]．カイラル異常項は軸性カレントに，二つの極性ベクトルカレントもしくは二つの軸性カレントが結合するときに一般的に現れる．グルーオン場が結合するときの寄与を計算すると

$$\partial_\mu J_5{}^\mu = 2N_f \frac{g_s{}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\widetilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \tag{6.76 a}$$

N_f：フェルミオンの数

$$\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma} \tag{6.76 b}$$

となる．この式の右辺は，三角異常項図を実現できるすべてのフェルミオンの寄与の和であり，ループを構成するフェルミオンが質量をもっていても変わらない．（6.76 a）式右辺は，θ 真空で導入したラグランジアン $\mathscr{L}_\theta$（6.72）を，最初から実効的ラグランジアンとして入れて計算しても得られる．

異常項が存在すると，ラグランジアンからつくった $U_A(1)$ ネーターカレントは，質量項が存在しない場合でも保存しない．この結果として，繰り込み可能条件として必須条件であったワード-高橋の恒等式もまた成立しないから，軸性カレントがゲージカレントの場合は深刻な問題となる．ただし，ループに関与するすべてのフェルミオンについて足し上げれば異常項が消えるような理論構成になっていれば問題はなく，標準理論はまさにそのようになっている

(§5.2参照). 一方，カイラル対称がグローバルであるならば深刻な問題は起きない．実際，$\pi^0 \to \gamma\gamma$ の崩壊率を説明するには，この項の存在が必要なことがわかっている[1].

さて，微小カイラル変換，$\delta q = -i\delta\alpha\gamma^5 q$ を行うときのラグランジアンの変化量は式 (6.74 b)，(6.76) により，

$$\delta\mathscr{L} = \delta\alpha\partial_\mu J_5{}^\mu = \delta\alpha 2N_f \frac{g_s{}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \qquad (6.77)$$

で与えられる．右辺の寄与はQCD実効ラグランジアン，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}_{\mathrm{QCD}} + \mathscr{L}_\theta \qquad (6.78\,\mathrm{a})$$

$$\mathscr{L}_\theta = \theta\frac{g_s{}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \qquad (6.78\,\mathrm{b})$$

の中の $\mathscr{L}_\theta$ の係数 θ が，カイラル変換 $q \to \mathrm{e}^{-i\alpha\gamma_5}q$ で $\theta \to \theta + 2\alpha N_f$ と変わることを意味する．

6.2.2　カイラル変換と質量項

クォークに質量があれば，異常項を入れなくとも軸性カレントは保存しない．運動方程式から

$$\partial_\mu J_5{}^\mu = 2im\bar{q}\gamma^5 q \qquad (6.79)$$

という関係式が導ける．ラグランジアンの質量項は，カイラル変換によって

$$-\mathscr{L}_M = m\bar{q}q \longrightarrow m\bar{q}\mathrm{e}^{-i2\alpha\gamma^5}q = m\bar{q}q\cos 2\alpha - im\bar{q}\gamma^5 q\sin 2\alpha \qquad (6.80\,\mathrm{a})$$

と変換される．ここに，γ^0 と γ^5 は反可換であることを使った．なお q_L と q_R は一般に異なる軸性電荷をもつので，カイラル変換は

$$q_L \longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha_L}q_L, \qquad q_R \longrightarrow q_R\mathrm{e}^{-i\alpha_R} \qquad (6.80\,\mathrm{b})$$

のように，書き表すこともできる．

$$\bar{q}q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L, \qquad \bar{q}\gamma^5 q = \bar{q}_L q_R - \bar{q}_R q_L \qquad (6.81)$$

に (6.80 b) を適用すれば，

$$\bar{q}'q' = \cos(\alpha_R - \alpha_L)(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) - i\sin(\alpha_R - \alpha_L)(\bar{q}_L q_R - \bar{q}_R q_L) \qquad (6.82)$$

であるので，二つのカイラル変換 (6.80 a) と (6.80 b) は，$\alpha = (\alpha_R - \alpha_L)/2$ で結びついている．また，$\mathscr{L}_\theta$ と位相をもった質量項はカイラル変換で相互転換が可能であり，互いに同等なことがわかる．すなわち

$$\mathcal{L}_\theta \longleftrightarrow \bar{q}_L e^{i\theta} q_R + \text{h.c.} \tag{6.83}$$

標準理論では，クォークの質量は対称性が自発的に破れるときに生じ，クォークの結合定数とヒッグスの真空期待値 v の積で表される．真空期待値は，一般には実数ではない．小林-益川行列を導くときの議論でわかるように，対角化するためには q_L と q_R で別の変換を施すので，一般には質量行列はエルミートでない．すなわち，M を質量行列，Ψ をクォークの列ベクトルとすると対角化された質量項は，

$$-\mathcal{L}_M = \overline{\Psi}_L M \Psi_R + \overline{\Psi}_R M^\dagger \Psi_L$$

$$= \cos\theta_{EW}(\overline{\Psi}_L\Psi_R + \overline{\Psi}_R\Psi_L) + i\sin\theta_{EW}(\overline{\Psi}_L\Psi_R - \overline{\Psi}_R\Psi_L) \tag{6.84 a}$$

$$\theta_{EW} = \arg[\prod_i m_i] = \arg[\det M] = \arg[\det M^U \cdot \det M^D] \tag{6.84 b}$$

と書ける．M が物理的な質量を表すためには，実行列でなければならない．虚数部を消去することはカイラル変換により達成できる．必要な回転角 α は，(6.82) を参照して，$\alpha = \theta_{EW}/2$ で与えられることがわかる．すなわち，QCD と電弱相互作用全体のラグランジアンに含まれるべき $\mathcal{L}_\theta$ の中の θ は，θ 真空の θ を $\bar{\theta}$ と書き直せば，実は

$$\theta = \bar{\theta} + \theta_{EW} \tag{6.85}$$

なのである．

以上の議論から，θ は，QCD の多重真空効果と電弱相互作用に起因するクォークの質量位相との二つの寄与を含むことがわかる．両者は，完全に独立な二つの要因と考えられ，互いに相殺する理由はなく，一般的には $\mathcal{L}_\theta \neq 0$ と見なさなければならない．

$\mathcal{L}_\theta$ の項は，電磁場でいえば $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ のような項であり，P と T を破る．C は保存する．したがって CP も破る．この項は，全微分であるから通常の議論では寄与しないはずであるが，先に議論したようにインスタントンが存在するとこの項は 0 でない．

この項が存在すると電磁カレント $J_{EM}{}^\mu$ と結合させた

$$\left\langle n \middle| i\int d^4x\, \mathcal{L}_\theta J_{EM}{}^\mu(0) \middle| n \right\rangle A_\mu \sim \left\langle n \middle| i\int d^4x\, \theta\, 2im\bar{q}\gamma^5 q J_{EM}{}^\mu(0) \middle| n \right\rangle A_\mu \tag{6.86 a}$$

が，中性子 n の電気双極子 d_n に寄与する．計算によれば[8]，

$$d_n \sim 3\times 10^{-16}\theta e\cdot\text{cm} \tag{6.86 b}$$

となり，実験上限値 $0.9\times10^{-25}e\cdot\mathrm{cm}$ を入れれば，

$$\theta<10^{-9} \tag{6.87}$$

を得る．すなわち，$\mathcal{L}_\theta$ の θ を恣意的に 0 にする理由がなくしかも実際には非常に小さい値をとる．なぜ θ がかくも小さい値をとるかというのが，“強い CP 問題”である．

6.2.3 $U(1)$ 問題

θ の値は不定であるにしても，θ 真空が存在すると懸案問題が少なくも一つは解決する．

QCD には，u, d クォークの質量が 0 の極限で，グローバルな香りの $U(2)_R\times U(2)_L$ 対称がある．現実には，クォーク対の凝縮という力学的要因により，$U(2)_{R-L}$ 対称が自発的に破れ，その結果のゴールドストーンボソンとして π と η が発生する．このうち，π は $SU_{R-L}(2)$ の η は $U_{R-L}(1)=U_A(1)$ 対称のゴールドストーンボソンである*4)．クォークの質量が有限であるという効果をも考慮すると，π と η の間には一定の関係が存在し，$m_\eta<\sqrt{3}\,m_\pi$ の関係が成立することがいえる[7]．実際の質量はこの関係を大きく破っているので[9]，η をゴールドストーンボソンとは見なせないというのが $U(1)$ 問題である．これは，$U_A(1)$ カレントには，異常項が存在するのでインスタントン効果により

$$\Delta Q_5=\int\frac{\mathrm{d}Q_5}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\left[\int J_5{}^0\mathrm{d}^3x\right]_{t=-\infty}^{t=\infty}=\nu\neq0 \tag{6.88}$$

となり，保存カレントにはなりえず，したがって η はゴールドストーンボソンではないという解釈で解決がつく．しかし，$U_A(1)$ カレントを次式によって再定義すればどうであろうか？

$$\tilde{J}_5{}^\mu\equiv J_5{}^\mu-2N_f\frac{g^2}{16\pi^2}K^\mu \tag{6.89}$$

$J_5{}^\mu$ はカイラルカレント，K^μ は (6.50) で定義されたカレントであり，上式で定義した $\tilde{J}_5{}^\mu$ および対応するカイラル荷

$$\tilde{Q}_5=\int\tilde{J}_5{}^0\mathrm{d}^3x \tag{6.90}$$

---

*4) $U(3)_{\mathrm{flavor}}$ 対称のときは，π, K, η が $SU_A(3)$ の，η' が $U_A(1)$ のゴールドストーンボソンに対応する．

は保存量であるので，問題が再燃するように見える．新しい保存量 $\widetilde{Q}_5$ による対称操作は何を変えるのであろうか．この $\widetilde{Q}_5$ 量子数は保存量ではあるがゲージ不変量ではない（$\partial_\mu K^\mu$ はゲージ不変であるが，K^μ はゲージ不変ではない）．

実際，(6.44)，(6.50 b) を参照すれば

$$\Omega\left[\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^3x K^0\right]\Omega^{-1}=\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^3x K^0-1 \tag{6.91 a}$$

$$\therefore\quad \Omega\widetilde{Q}_5\Omega^{-1}=\widetilde{Q}_5+2N_f \tag{6.91 b}$$

であるので，(6.69) と (6.91 b) を使えば

$$\begin{aligned}\Omega e^{i\alpha\widetilde{Q}_5}|\theta\rangle&=\Omega e^{i\alpha\widetilde{Q}_5}\Omega^{-1}\Omega|\theta\rangle\\&=e^{i(\theta+2N_f\alpha)}[e^{i\alpha\widetilde{Q}_5}|\theta\rangle]\end{aligned} \tag{6.92}$$

これを (6.69) と比較すれば，$\widetilde{Q}_5$ は θ 真空の θ 値を変える演算子であることがわかる．

$$e^{i\alpha\widetilde{Q}_5}|\theta\rangle=|\theta+2N_f\alpha\rangle \tag{6.93}$$

このように，$\widetilde{Q}_5$ は正当な対称演算子としての資格はもつものの，ゲージ不変でないので，ゲージ不変な物理量ないしは遷移振幅には影響を及ぼさない．したがって，$\widetilde{Q}_5$ 演算に基づく対称性が破れても物理的なゴールドストーンボソンは生じない．すなわち，η はゴールドストーンボソンではありえない[10)]．したがって，$U(1)$ 問題は存在しない（解決する）．

$U(1)$ 問題は，θ 真空が実在することの有力な実験的証拠を与えるものである．

6.3　アクシオンのモデル

6.3.1　PQ 対称性と標準アクシオン

もし，どれかのクォークが質量をもたなければ，カイラル変換の自由度が存在し，すべての θ は同等となるから，θ を 0 にすることができる．すなわち，θ 問題は存在しない．しかし，一番軽いと目されている u クォークでも，メソンやバリオンにおける低エネルギー現象論から，有限質量をもたないと具合の悪いことがわかっている[11)]．

$$m_u(1\,\text{GeV})=5.1\pm1.5\,\text{MeV} \tag{6.94}$$

現在強いCP問題を解決する方法として最も有力視されているのが，ペッチャイ-クィン（Peccei-Quinn）による新しい対称性（PQ対称と呼ばれる．対応する保存量を$Q_5(PQ)$と書くことにする）の導入である[1,12]．その処方は，自発的対称性が破れる前の電弱相互作用に，すでにもっている$U_Y(1)$対称性に加えて，さらにカイラル対称性$U_A(1)$の存在を要求するのである．カイラル対称性をもてば，θの値は任意に変えられるから消去できる．PQ対称が弱い相互作用の自発的破れに伴って破れると，ゴールドボソンとしてのアクシオンが発生する[13]．最初に提案されたPQ対称の処方に従うアクシオン（標準アクシオン）は，実験的に否定されたので，現在はいわゆる見えないアクシオン（invisible axion）が可能性として残されているが，アクシオンの相互作用を理解するには，標準アクシオンを学習し，見えないアクシオンはその変更モデルとして理解するのが便利である．以下は簡単のためuとdのみを代表的に考察し，他のフェルミオンは適宜，式の中に加えていくものとする．

標準モデルのフェルミオンとヒッグスの湯川相互作用

$$\mathcal{L}_m=(\sqrt{2}m_u/v_1)\,\overline{\Psi}_L\Phi_1u_R+(\sqrt{2}m_d/v_2)\,\overline{\Psi}_L\Phi_2d_R+\text{h.c.} \tag{6.95}$$

をカイラル不変にするためには，u, dの位相の変化

$$\Psi_L\longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha_L}\Psi_L \tag{6.96 a}$$

$$u_R\longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha u_R}u_R,\qquad d_R\longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha d_R}d_R \tag{6.96 b}$$

を，$\Phi_{1,2}$が吸収できなければならない．このためには，$\Phi_{1,2}$もまたu, dと同じくカイラル荷Q_5をもち，PQカイラル変換により

$$\Phi_k\longrightarrow \mathrm{e}^{+i\alpha_k}\Phi_k \tag{6.97 a}$$

$$\alpha_1=-\alpha_L+\alpha_{u_R},\qquad \alpha_2=-\alpha_L+\alpha_{d_R} \tag{6.97 b}$$

と変換されなければならない．すなわち，カイラル位相変換の対象をフェルミオンのみならずヒッグススカラーにまで広げたのがPQ対称である．標準モデルでは，$\Phi_1=\Phi_2{}^c=i\tau_2\Phi_2{}^\dagger$であるが，$PQ$対称性が成立するためには，独立のヒッグス2重項を最低2組必要とする．さて，Φ_i中の超電荷Yを担う部分に，$Q_5(PQ)$を担う部分（アクシオン）が混じらないようにしなければならない．なぜならは対称性が自発的に破れるとYを担う部分は中性カレントZ^μの第3成分に吸収されるからである．PQ対称のない通常の2-ヒッグスモデルでは，この成分は中性ヒッグスAとなる部分であり，

$$A \sim -\mathrm{Im}(\Phi_1{}^c)^0 \frac{v_2}{v} + \mathrm{Im}\,\Phi_2{}^0 \frac{v_1}{v} \tag{6.98 a}$$

$$v = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2} \tag{6.98 b}$$

という形をしている (§3.4.1, 式 (3.53) を参照). ここに, v_i は Φ_i の真空期待値である. 以下の議論では, アクシオンを Φ_k の位相場として考えるの便利である. この場合 Φ_i が真空期待値をもつとき, 他の成分とは切り離せて,

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \exp(iax/v) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \exp(ia/xv) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = v_2/v_1 \tag{6.99}$$

の形に書くことができる. この場合 (6.97) の PQ 変換は,

$$a \longrightarrow a + \alpha v \tag{6.100}$$

という形をとる.

各フェルミオンにどのような $Q_5(PQ)$ を割り当てるかはモデルの選択である. 元論文では, すべての左巻きフェルミオン f_L は, $Q_5(PQ)=0$ をもち, u_R は Φ_1 に d_R は Φ_2 にのみ結合するとした. このとき

$$\alpha_{u_R} = \alpha x, \qquad \alpha_{d_R} = \alpha / x \tag{6.101}$$

として矛盾なくおさまる. $Q_5(PQ)$ 荷を運ぶ $U_A(1)$ カレントは, 容易に計算できて

$$J_{PQ}{}^{\mu} = -v\partial^{\mu} a + x \bar{u}_R \gamma^{\mu} u_R + (1/x)\,\bar{d}_R \gamma^{\mu} d_R \tag{6.102}$$

このカレントはカラー異常項をもつから

$$\partial_{\mu} J_{PQ}{}^{\mu} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{g_s{}^2}{16\pi^2} \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] \tag{6.103}$$

アクシオンと $\mathscr{L}_\theta$ との関連を調べるには, ラグランジアンの中で形式的に Φ_k からアクシオンを消去する変換を行えばよい. そうするとフェルミオンは,

$$u_R \longrightarrow \mathrm{e}^{-iax/v} u_R, \qquad d_R \longrightarrow \mathrm{e}^{-ia/xv} d_R \tag{6.104}$$

の変換を受ける. このことによって質量項に位相,

$$\frac{a}{v}\left(x + \frac{1}{x}\right) \equiv \frac{a}{v} N \tag{6.105}$$

が導入されるが, (6.83) の議論によって, これは $\mathscr{L}_\theta$ の θ を

$$\theta \longrightarrow \theta + \frac{a}{v} N \tag{6.106}$$

とすることと同等である．N はモデルにより異なる係数である．ラグランジアンの中の $\mathcal{L}_\theta$ および

$$\frac{a}{v}N\frac{{g_s}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\widetilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \tag{6.107}$$

は，a に対するポテンシャルを提供するから，a の励起は 0 からではなくポテンシャルを最小にする停留点からの差となる．したがって，

$$a=\langle a\rangle+a_{\mathrm{phys}} \tag{6.108 a}$$

$$\theta+\frac{\langle a\rangle}{v}N=0 \tag{6.108 b}$$

a_{phys} が物理的に観測されるアクシオンを表す．以下は，a_{phys} を改めて a と書く．このことは，カラー異常項が，ヒッグスポテンシャルに余分な寄与を与え，その結果水平であった回転 W 字形のポテンシャルが傾き，アクシオン場が新たに生じたポテンシャルの最低点に向かって動くことを意味する．$\theta\neq0$ であっても，アクシオンが存在すれば真空を最小にするように場の値が再調整され，力学的要因でもって $\theta=0$ が保証されるということである．

(6.104) をフェルミオンカレントの部分で見れば，それはアクシオンとフェルミオンとの相互作用を与える．結局，アクシオンの関与するラグランジアンは，運動エネルギー項とカラー異常項結合部分 (6.107) とをも合わせて書き下ろすと

$$\mathcal{L}_{\mathrm{axion}}=\frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a+\frac{1}{v}\left[\partial_\mu a\sum\nolimits_i\left(x\bar{u}_{iR}\gamma^\mu u_{iR}+\frac{1}{x}\bar{d}_{iR}\gamma^\mu d_{iR}\right)+Na\frac{{g_s}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\widetilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]\right]$$
$$+\frac{1}{v}\left[\partial_\mu a\frac{1}{x}\sum\bar{l}_{iR}\gamma^\mu l_{iR}+Ea\frac{e^2}{32\pi^2}\widetilde{B}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\right] \tag{6.109}$$

$$B^{\mu\nu}={F_{EM}}^{\mu\nu}-\tan\theta_W{F_Z}^{\mu\nu} \tag{6.110 a}$$

$$N=N_g\left(x+\frac{1}{x}\right),\qquad E=2N_g\left[\frac{4}{3}x+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\right] \tag{6.110 b}$$

となる．ここには，すべてのフェルミオンの寄与を取り入れた．すなわち，第1行の大括弧 [⋯] にはこれまでの議論をすべてのクォークに拡張した結果を書き，第2行の大括弧 [⋯] には同様の議論から導ける電弱異常項の寄与を付け加えておいた．N_g は世代数，$B_{\mu\nu}$ は $U(1)$ ゲージ場テンソルで，電磁場 (${F_{EM}}^{\mu\nu}$) と Z (${F_Z}^{\mu\nu}$) の混合で表せ，θ_W はワインバーグ角である，N, E はモデ

ルにより変わる量である.

アクシオンとフェルミオンとの結合定数は, $\sim 1/v = G_F$ で与えられるから, 基本的に弱い相互作用である. アクシオンの質量はカイラル異常項を通して獲得するので, (6.109) の a の係数の期待値がアクシオンの質量を与える. 質量の計算は低エネルギーのカレント代数または低エネルギー実効ラグランジアンの処方で計算することができる. 結果のみを記すと[14],

$$m_a{}^2 = \frac{m_\pi{}^2 F_\pi{}^2}{v^2} N^2 \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \longrightarrow m_a \simeq 75\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{keV} \qquad (6.111)$$

となる. $F_\pi \fallingdotseq 93$ MeV は π の崩壊定数である. a は, π や η と量子数が同じであり混合が可能である. 粒子がアクシオンを含む相互作用の遷移確率も同様に計算可能である.

標準アクシオンの存在は, 実験室での探求や天体物理の議論によりほぼ否定されている. 最も堅固なテストは次の実験からくる.

表 6.1 標準アクシオンを否定する実験

理論		実験
$K^+ \to \pi + a$	$\sim 3\times10^{-5}(x+1/x)^2$	$<3.8\times10^{-8}$ [15]
$J/\psi \longrightarrow a+\gamma$	$\sim 3.7\pm0.8\times10^{-5}(1/x)^2$	$<1.4\times10^{-5}$
$\Upsilon \longrightarrow a+\gamma$	$\sim 2.0\pm0.7\times10^{-4}(1/x)^2$	$<3\times10^{-4}$ [16]
$\tau(a\to 2\gamma)$	$\sim 0.2\left(\frac{100\text{ keV}}{m_a}\right)^5$ sec	検出されず
$\tau(a\to e^+e^-)$	$\sim 4\times10^{-9}\left(\frac{1\text{ MeV}}{m_a}\right)\left(1-\frac{4m_e{}^2}{m_a{}^2}\right)^{1/2} x^2$ sec	検出されず

現在までの実験結果は, 標準アクシオンの存在可能性をほぼ完全に否定している. また後に述べる天体物理学の考察, 例えば赤色巨星の冷却速度の議論もこれを裏づけている. PQ 対称の破れのスケール v_{PQ} が電弱相互作用のスケール v で表される限り, アクシオンの存在する余地はない. したがって, もし, $\mathscr{L}_\theta$ の消去を PQ 対称性に求めるならば, v_{PQ} を非常に大きくする必要がある. v_{PQ} を十分大きくとれば, これまでの地上の実験では検出はまず不可能となるので, 見えないアクシオン (invisible axion) という名を与えられている.

6.3.2 見えないアクシオン

見えないアクシオンにもいろいろモデルがあるが，共通点として次の性質を共有するスカラー場 σ の存在を仮定する．

(1) $Q_5(PQ)$ を担い，非常に大きな真空期待値 v_{PQ} をもつ．

(2) $SU(2)\times U(1)$ に関しては1重項である．すなわち，通常の粒子とは，$U_{PQ}(1)$ 対称性を通じてのみ相互作用をする．

第2の性質が必要なのは，通常の相互作用に大きなスケール v_{PQ} が入り込むのを防ぐためである．通常のフェルミオンにどのような $Q_5(PQ)$ を割り当てるかによりさらにモデルの相違が生じる．代表的なモデルとして次の2種をあげる．

(a) 通常のフェルミオンは $Q_5(PQ)$ をもたないが，$Q_5(PQ)$ をもつ新種の(多分重い) クォーク X が存在する (KSVZ アクシオン[17])．

$$-\mathcal{L}=h\overline{X}_L\sigma X_R+\text{h.c.} \tag{6.112 a}$$

$$\sigma=\frac{v_{PQ}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{ia/v_{PQ}} \tag{6.112 b}$$

X_R のみが $Q_5(PQ)$ をもつとすれば前と同じ議論から，異常項を通じて通常の粒子と結合することがいえる．

$$\mathcal{L}_a=\frac{a}{v_{PQ}}\left[\frac{g_s{}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[\widetilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]+3(Q_{XEM})^2\frac{e^2}{16\pi^2}\widetilde{F}_{EM\mu\nu}F_{EM}{}^{\mu\nu}\right] \tag{6.113}$$

Q_{XEM} は X の電荷であり，$F_{EM\mu\nu}$ は電磁場を表すテンソルである．相互作用は，$v\to v_{PQ}$ になった以外は前とほとんど同じである．このアクシオンはトリーレベルでは，電子に結合しないことからハドロン的アクシオンと呼ばれる．

(b) 通常のフェルミオンは $Q_5(PQ)$ をもつ．したがって標準アクシオンと同様に2個のヒッグス場を必要とする．ただし，通常のフェルミオンは σ に直接は結合できず．ヒッグスポテンシャルを通じてのみ σ と結合する．(DFSZ アクシオンまたの名は GUT アクシオン[18])

σ は通常のヒッグスと4次の結合を通じて結合する．

$$\mathcal{L}_{\sigma H}=\kappa\Phi_1{}^TC(\sigma^\dagger)^2\Phi_2+\text{h.c.} \tag{6.114}$$

$v_{PQ}\gg v$ の極限では，3個のヒッグス場は次のような形をとる．

$$\sigma=\frac{v_{PQ}}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{ia}{v_{PQ}}\right) \tag{6.115 a}$$

$$\Phi_1=\frac{v_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{iX_1a}{v_{PQ}}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{6.115 b}$$

$$\Phi_2=\frac{v_2}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{iX_2a}{v_{PQ}}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{6.115 c}$$

$$X_1=\frac{2v_2{}^2}{v^2}, \qquad X_2=\frac{2v_1{}^2}{v^2} \tag{6.116}$$

上の結合形は，$a\to a+\alpha v_{PQ}$ の PQ 対称操作で不変な形をしている．他の粒子との結合は，$v\to v_{PQ}$, $x\to X_1$, $1/x\to X_2$ の置き換え以外は標準アクシオンと同じ形をしており，相互作用の大きさのみが $(2v_1v_2/vv_{PQ})$ だけ小さくなっている．このアクシオンはレプトンとトリーレベルの相互作用をもつ．

最後にアクシオンの現象を議論するときに必要な質量と結合定数の値を与えておく．これらはカレント代数などを使いトリー近似を精密化した現象論的ラグランジアンである[19,20]．質量については，(6.111) より

$$m_a=\frac{m_\pi F_\pi}{f_A}\frac{\sqrt{z}}{1+z}=0.62\ \mathrm{eV}\left(\frac{10^7\ \mathrm{GeV}}{f_A}\right) \tag{6.117 a}$$

$$F_\pi=93\ \mathrm{MeV}, \quad z=\frac{m_u}{m_d}=0.568\pm0.042, \quad f_A=\frac{v_{PQ}}{N} \tag{6.117 b}$$

アクシオンとフォトン γ，フェルミオン f との相互作用を次の形にまとめる．

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma}=-\frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}aF_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}=g_{a\gamma\gamma}a\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \tag{6.118 a}$$

$$\mathcal{L}_{af}=g_{af}a\overline{\psi}_f i\gamma^5\psi_f{}^{*5)} \tag{6.118 b}$$

$$g_{a\gamma\gamma}=\frac{e^2}{8\pi^2 f_A}\left(\frac{E}{N}-1.92\right)\equiv\frac{\alpha}{\pi f_A}g_\gamma \tag{6.118 c}$$

$$N=\sum_j Q_5(PQ)_j, \qquad E=2\sum_j Q_5(PQ)_j Q_j{}^2 N_{cj} \tag{6.118 d}$$

N および E はカラー異常項と電磁気異常項に現れる係数であり，モデルに依存する量である．$Q_5(PQ)_j$ はフェルミオンの PQ 荷，Q_j は e を単位とした電荷，N_{cj} はカラー自由度（クォークで3，レプトンで1）である．フォトンとの結合にカラー異常項係数 N が現れるのは，アクシオンが π^0 や η と混合するか

---

*5) 微分結合，$\mathcal{L}_{aff}=f_{af}\partial_\mu a\overline{\psi}_f\gamma^\mu\gamma^5\psi_f$ で定義するときの結合定数とは，$g_{af}=2m_f f_{af}$ で結びついている．

らである．現象解析に使用される数値の例を表6.2に掲げる．これから，KSVZ モデルは電子とは直接は結合しないこと，フォトンに対する結合が DFSZ モデルに比べほぼ10倍強いことがわかる．

表 6.2　DFSZ，KSVZ モデルにおけるアクシオン結合定数[19]

	DFSZ	KSVZ
$g_\gamma=(E/N-1.92)/2$	0.37	-0.96
c_e	$(1/3)\cos^2\beta$	0
c_p	$-0.10-0.45\cos^2\beta$	-0.39
c_n	$-0.18+0.39\cos^2\beta$	$+0.04$

無次元の結合定数を，$g_\gamma=g_{a\gamma\gamma}(\pi f_A/\alpha)$，$g_{aj}=c_j m_f/f_A(j=e, p, n)$ によって導入する．E/N はフェルミオンのもつ PQ 荷や電荷に依存する項である．DFSZ は大統一理論の値 $E/N=8/3$ を採用した値．β はヒッグス真空期待値の比で，$\tan\beta=v_2/v_1$．定数 1.92 やハドロンとの結合はカレント代数計算からでてくる値である．

6.4　宇宙におけるアクシオン

アクシオンは，もし存在すれば宇宙の歴史において重要な役割を果たすのみならず，暗黒物質の有力な候補でもある．小さな質量をもちかつ非常に弱い相互作用をするという性質をニュートリノと共有するため，星の進化においてニュートリノが果たす役割は，アクシオンにもほとんどそのまま適用できる．しかし，アクシオンがボース凝縮体という特異な性質をもつため，暗黒物質としての性質は正反対である．ニュートリノが熱い暗黒物質（相対論的速度で動く粒子）となるのに反し，アクシオンは冷たい暗黒物質（非相対論的運動の粒子）を構成する．

6.4.1　星の冷却剤

星の進化の過程で，アクシオンがつくられるとエネルギーをそのまま星の外へ逃がしてしまうため有効な冷却剤として作用し，星の進化を早め寿命を短くする．冷却効果に効くアクシオンの反応は，

コンプトン散乱　　：$\gamma+e \longrightarrow e+a$

アクシオン制動放射：$e+Z \longrightarrow e+Z+a$
プリマコフ効果　　：$\gamma+Z \longrightarrow Z+a$

などである．アクシオン反応が既知の星の進化過程を乱さないという条件からアクシオンの結合定数もしくは質量に関して制限がつく．星の進化過程に寄与する反応を選択考慮することにより，それぞれ電子，核子，フォトンに対する結合定数に制限を与える．

アクシオンの結合定数に対する天体物理学的制限の議論をいくつか紹介しておこう[20]．太陽程度の比較的軽い星が，水素の燃えている主系列星から，ヘリウムが燃える段階になると赤色巨星となる．ヘリウムフラッシュを起こすと絶対輝度を急速に下げてヘルツスプルング-ラッセル図で水平分岐と呼ばれる時期を経てふたたび巨星化する．この時期は芯でヘリウムが燃える過程とヘリウム芯の外で水素が燃える過程が微妙なバランスを保ち，表面温度が変化するのに全光度は不変（名前の由来）に保たれる．この時期はニュートリノによる冷却作用も効果的に働いており，アクシオンの存在はそれを乱す（加速する）のである．中心の温度は 10^8 k(～10 keV) 程度であるので $m_a \lesssim 10$ keV のアクシオンが冷却作用に寄与する．ここではアクシオンはもっぱらプリマコフ効果により生産される．ヘリウムフラッシュが起きる時期，星が水平分岐にとどまっている期間（すなわち星の数）や光度などがアクシオンの存在と結合の大きさに応じて敏感に変化する．特に球状星団では多くの星がさまざまな進化状態に分散分布をしており，星の進化率との比較からアクシオンとフォトンの結合定数に対する制限が得られる．

$$g_{a\gamma\gamma} < 0.6 \times 10^{-10}\ \mathrm{GeV}^{-1} \tag{6.119 a}$$

$$g_{ae} < 0.5 \times 10^{-12} \tag{6.119 b}$$

同様な制限が，超新星 SN 1987 A で観測されたニュートリノバーストが数秒間であったという事実から得られる[21]．ただし今度は芯にある中性子星のアクシオン閉じ込めや開放過程を問題にするので，制限はアクシオンとハドロンの結合定数にかけられる．アクシオンがあればニュートリノの演じる役割を増幅し，バースト時間を縮めてしまう．これは結合定数が小さいと起きる現象であるので結合定数に対する下限を与える．一方，結合が大きくなると，芯に捕獲される量が多くなり冷却作用が減少するので，あまり大きくてもいけない．制

限は

$$3\times10^{-10}<g_{aN}<3\times10^{-7} \tag{6.120 a}$$

となる．しかし，もっと強くなると今度はアクシオンそのものがニュートリノと同じく観測にかかるはずであるので観測数の制限から[22]

$$10^{-6}\lesssim g_{aN}\lesssim10^{-3} \tag{6.120 b}$$

これら結合定数の制限は，(6.118) や表 6.2 を使えば f_A もしくは m_a に対する制限に換算できる．天体物理学による制限を図 6.8 にまとめる[19]．

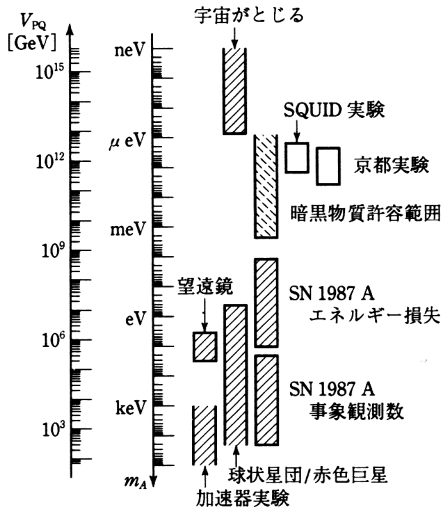


図 6.8 アクシオン質量の実験や天体物理学の考察から禁止される領域（斜線）と許される領域[19]（後者をアクシオンの窓という）．白抜きの箱は計画中の実験の検出可能領域（§6.4.3 参照）．

6.4.2 宇宙の残存アクシオン*6)

質量が 10^{-2}～10^{-3} eV 以上あるアクシオンが存在すれば，他の粒子との熱的平衡状態において生成されて今日まで残っている可能性はあり（熱的アクシオン），その場合の残存数（100/cm³）は背景輻射のフォトンと同程度である．しかし，宇宙を閉じるには～100 eV 程度の質量が必要であるが，そのくらい重

*6) この§は，宇宙論の知識を必要とする．宇宙論に習熟していない人は第 8 章，特に§8.1～8.4 を先に読むことを薦める．

いと宇宙年齢より速く崩壊してしまうので，熱的アクシオンが宇宙密度に相当程度寄与するという可能性は特別なケース以外は除外されている．より興味深いのは，次に説明する非熱的過程による生成の可能性である[23]．

この場合，アクシオンが宇宙に関与する過程は 2 段階に分けられる．第 1 段階は，宇宙温度 T が $\sim v_{PQ}$ のときに，σ のつくるポテンシャル

$$V(\sigma) \sim \lambda(|\sigma|^2 - v_{PQ}{}^2/2)^2 \tag{6.121}$$

によって，$U_{PQ}(1)$ 対称を担うヒッグス σ が真空期待値をもつときであり，第 2 段階は，$T \lesssim \Lambda_{QCD}$ でアクシオンがカラー異常項を感じ始めるときである．このときの実効ラグランジアンは

$$\mathscr{L} = \left(\theta_{eff} + \frac{a}{f_A}\right)\frac{g_s{}^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}) \tag{6.122}$$

の形をとる．θ_{eff} は第1段階で獲得した真空期待値に電弱相互作用相転移に伴い付加されるクォーク質量項を含めたものである．アクシオンの質量発生は $T \sim \Lambda_{QCD}$ の頃であり，質量は時間とともに変化し，質量値が確定するのは $T \ll \Lambda_{QCD}$ になってからである．第1段階で σ は（6.112b）で表される形をとる．a は位相場であるので，真空期待値 $\langle a(x) \rangle$ は，$-\pi \sim +\pi$ までの任意の値をとりうるが，第2段階でアクシオンに質量が発生すると同時に異常項によるポテンシャルを感じて，ポテンシャルの谷底（(6.108b）を満たす $\langle a(x) \rangle$ の値，つまり θ_{eff}）に向かって動き始めるのである（熱的アクシオンに対比して傾斜アクシオン（misalignment axion）という[23]）．しかし，勢いあまって停留点 $\theta = \theta_{eff}$ を行き過ぎてしまい振動運動を始める．$\langle a(x) \rangle$ は，古典的な場，すなわち多量のアクシオンの集団的運動に対応する．アクシオンが感じるカラー異常項によるポテンシャルには，巻つき数 n により指定されるだけの数の谷底があり，どこに向かって転げ落ちるかは不定であるが，ここでは簡単のため $n=0$ が現在の世界に対応していることにする．$\Theta(x) \equiv \langle a(x) \rangle / f_A$ とおけば，ポテンシャルの谷底の付近では，Θ の運動を記述するラグランジアンは近似的に

$$\mathscr{L} = f_A{}^2\left[\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - \frac{1}{2}m_a{}^2\Theta^2\right] \tag{6.123}$$

と表されよう．膨張宇宙のもとでは空間のスケール R もまた時間の関数であるが，その効果を取り入れるには，作用を $\int d^4xR(t)^3\mathscr{L}$ と変えて Θ に対する

運動方程式を導けばよい．ここに $R(t)$ は長さの次元をもつ量である．Θ の膨張宇宙における運動方程式は

$$\ddot{\Theta}+3H(t)\dot{\Theta}+m_a{}^2(t)\Theta=0 \tag{6.124 a}$$

$$H(t)=\frac{\mathrm{d}\ln R}{\mathrm{d}t} \tag{6.124 b}$$

と書ける．$H(t)$ は，時刻 t のハッブル定数で宇宙の膨張率を表す．宇宙温度を T とすれば，宇宙初期の輻射優勢の時代は，ρ（エネルギー密度）$\sim R^{-4}$, $R \sim T^{-1} \sim t^{1/2}$，背景輻射が切り離されて後の物質優勢の世界では，$\rho \sim R^{-3}$, $R \sim T^{-1} \sim t^{2/3}$ のように変化することが宇宙論の議論から知られている（第8章および文献 23)）．$T \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ では，m_a は 0 であり（6.124）の解は $\Theta=$定数である．また，時間的に定数のみならず空間的にも座標によらない完全な定数であることがいえる．なぜなら，場所依存性をもっていたとしても，そのフーリエ成分の波数 k は，宇宙膨張に伴って，$T \sim v_{\mathrm{PQ}}$ から $T \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ に到るまでに完全に赤方偏移してしまうからである．この時点で，アクシオン場は運動量が 0 のボソンの集合体，すなわちボース凝縮体と見てよい．$T \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ で，アクシオンがカラー異常項を感じ始めるとともに，m_a の値は 0 から有限に成長し始める．$m_a(t) \fallingdotseq H(t)$ で Θ は振動を開始するが，m_a がゆっくりと成長すれば（断熱近似；$\mathrm{d}m_a/\mathrm{d}t \ll m_a{}^2$），$\Theta$ は減衰振動をする．断熱近似が成立するときは，$\dot{\Theta}^2$ を 1 周期の平均 $\langle\dot{\Theta}^2\rangle=\lambda(t)$, $\lambda=(\dot{\Theta}^2+m_a{}^2\Theta^2)/2$ で置き換えれば解ける．(6.124 a) に $\dot{\Theta}$ を掛けて，λ で書き直すと

$$\dot{\lambda}/\lambda+3H-\dot{m}_a/m_a=0 \tag{6.125 a}$$

$$\therefore\ \lambda(t)=A\frac{m_a(t)}{R^3} \tag{6.125 b}$$

すなわち，アクシオンは振幅が宇宙の膨張に伴って $\sim R^{-3/2}$ のように変化する減衰振動をする．アクシオン場のもつエネルギー密度は，振動のはじまる時刻を t_{osc} とすると，

$$\rho_a(t_{\mathrm{osc}})\sim\frac{1}{2}f_A{}^2m_a{}^2(t_{\mathrm{osc}})\Theta^2(t_{\mathrm{osc}})=\frac{C}{2}f_A{}^2m_a{}^2(t_{\mathrm{osc}}) \tag{6.126 a}$$

C は $\Theta(0\leqq\Theta<2\pi)$ の初期値で決まるオーダー1の数である（通常は便宜的に 0 に設定するが，ここではこの値が重要）．$t>t_{\mathrm{osc}}$ では，

$$\rho_a(t)\sim f_A{}^2\lambda(t) \tag{6.126 b}$$

で与えられ，さらに $T \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ で m_a の値が $T=0$ の値に落ちついた後は，$\rho_a = n_a m_a \sim m_a/R^3$ のように変化する．

すなわち，$m_a(t)$ が変化する時期を通じて，宇宙とともに膨張する体積スケール R^3 あたりの数は一定に保たれていることになる．先に述べたように，アクシオン場は運動量$\simeq 0$ のボース凝縮体として振る舞い，振動は多体の協同現象として行われる*7)．この時代はまだ輻射優勢の時代であり，宇宙のエネルギー密度は，$\sim R^{-4}$ で減衰するので，アクシオンの宇宙エネルギー密度に占める相対比が急速に成長し，f_A が大きいときは現在の宇宙エネルギー密度への寄与が無視できない．体積当たりの数が一定に保たれているので現在時刻と温度を t_0, T_0 とすると，

$$\rho_a(t_0) = \rho_a(t_{\mathrm{osc}}) \frac{m_a}{m_a(t_{\mathrm{osc}})} \left[\frac{T_0}{T_{\mathrm{osc}}} \right]^3 \tag{6.127}$$

t_{osc} は，運動方程式を眺めれば，

$$3H(t_{\mathrm{osc}}) = m_a(t_{\mathrm{osc}}) \tag{6.128 a}$$

で定義してよいから，

$$m_a(t_{\mathrm{osc}}) = 3H(t_{\mathrm{osc}}) \sim \frac{T_{\mathrm{OSC}}{}^2}{M_{Pl}} \tag{6.128 b}$$

*8)

とし，$m_a \sim m_\pi F_\pi / f_A$ ((6.117) 参照)，$T_{\mathrm{osc}} \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}} \sim 200\ \mathrm{MeV}$ を入れると現在のアクシオンのエネルギー密度 ρ_a は，大ざっぱに見積って

$$\rho_a(t_0) = \frac{C}{2} f_A \frac{m_\pi F_\pi T_0{}^3}{M_{Pl} \Lambda_{\mathrm{QCD}}} \sim \frac{f_A \Lambda_{\mathrm{QCD}}}{M_{Pl}} T_0{}^3 \tag{6.129 a}$$

となる．この密度が現在の宇宙の臨界密度 $\rho_c = 3H^2(t_0)/8\pi G_{\mathrm{Newton}} = 11h^2$ keV/cm^3 を超えないという条件から，

$$f_A \lesssim 10^{12}\ \mathrm{GeV} \quad (\text{または，} m_a \gtrsim 10^{-5}\ \mathrm{eV}) \tag{6.130 a}$$

という制限がつく．もう少し詳しい議論によれば[19,24]，

$$\Omega_a h^2 \approx 1.9 \times 3^{\pm 1} (10^{-6}\ \mathrm{eV}/m_a)^{1.175} \Theta^2 F(\Theta) \tag{6.129}$$

ここに Θ は (6.124) の Θ の初期値で $F(0)=1$, $F(\pi)=\infty$ である．$\Theta^2 F(\Theta) \simeq 1$ ととると，f_A への制限は，

*7) アクシオン反応によって，凝縮体が崩れて熱平衡状態にならないかとの心配は，$m_a \gtrsim O(\mathrm{eV})$ でない限り無用である．凝縮体からアクシオンが吸収されても，凝縮体の存在ゆえに再放出される[25]．

*8) §8.2 式 (8.25) 参照．

$$f_A \lesssim 10^{13}\,\mathrm{GeV} \quad (\text{または，} m_a \gtrsim 10^{-6}\,\mathrm{eV}) \tag{6.130 b}$$

である．現在アクシオンのもつ速度 v_a は，振動開始時にもっていた $\sim m_a$ 程度の運動量 p_{osc} が赤方偏移した $p_{\mathrm{osc}}(T_0/T_{\mathrm{osc}})$ を m_a で割った量で与えられるから，

$$v_a \sim \frac{p(t_0)}{m_a(t_0)} \sim \frac{m_a(t_{\mathrm{osc}})}{m_a(t_0)}\left(\frac{T_0}{T_{\mathrm{osc}}}\right) \sim 10^{-23}\left(\frac{m_a}{\mathrm{eV}}\right)^{-1} \tag{6.131}$$

で与えられ，完全に静止状態にあるといえる．

6.4.3 アクシオンの探索

a. アクシオンの所在地

アクシオンの質量については，まず加速器実験で O(keV) 以上の質量が否定され，それ以下でも ~1 eV 以上あると，前節で議論したように種々の天体現象と矛盾するので (図 6.8)，以下の議論は，質量がほぼ ~1 eV 以下のアクシオン探索に限る．質量が 0.1 eV 以上では，熱的に生産されるアクシオンが優勢であるが，それ以下では傾斜アクシオンが優勢となる．また，太陽中心ではアクシオンが大量につくられている可能性がある．質量が 10^{-3} eV 以下であれば暗黒物質として存在する可能性があり，特に 10^{-5} eV 以下のときは優勢な暗黒物質となる．質量は非常にゼロに近いにもかかわらず非相対論的であるので冷たい暗黒物質として振る舞う．輻射が切り離される以前でもアクシオンは輻射とほとんど相互作用をしないから，物質優勢の時代に入れば重力作用によるゆらぎの成長が進行する．したがって，輻射が切れたときはすでにゆらぎが進行し，かなり強い重力場が形成されているので，バリオンが急速にこの重力場に捉えられて銀河などの構造形成が進行するのである．冷たい暗黒物質であるから，現在の銀河にも捉えられていてハローとして存在するはずである．銀河の回転運動からハローのエネルギー密度が計算できて，

$$\rho_{\mathrm{HALO}} \sim 0.45\,\mathrm{GeV/cm^3} \tag{6.132}$$

であり[26]，数としては $\sim 3\times10^{13}/\mathrm{cm^3}\times(\rho_a/450\,\mathrm{MeV/cm^3})\,(10^{-5}\mathrm{eV}/m_a)$ ある．

以下，質量領域で異なる検出法のいくつかを述べる．熱的アクシオンの場合は，アクシオン崩壊からの単色 γ を見る方法が可能である．0.1 μeV 以下では，アクシオンが高周波強磁場の中でプリマコフ効果により転換されてできるフォトンの検出法が有力であるが[27]，それ以上では，太陽中心で大量に生産さ

れると目されるアクシオンをやはり磁場の中でX線に転換して検出する方法が可能である[28,29].

b. 望遠鏡による探索

熱的アクシオンの宇宙エネルギーに対する寄与は小さいが($\Omega \sim 0.01$ (m_a/eV)), 寿命が十分短いので($\tau(a \to 2\gamma) \sim 10^{25}$ sec(m_a/eV$)^5$), そのとき放出される単色の光を探索する．アクシオンはビリアル運動（付録B.4参照）をするので完全な単色とはならず幅をもつが，$\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-2}$ 程度である．予想される強度はほぼ地表での夜光強度と同程度である．夜光雑音を除去するため銀河集団に捕捉されているアクシオンに注目する．このアクシオンは銀河集団と同じ赤方偏移を示すはずであり，銀河集団外からの光を引き算すれば雑音は消えるがアクシオンからの光は残る．キット山頂望遠鏡を用い，波長領域3100～8300 A で3組の密集銀河団を観測したが単色光は見つからなかった[30]．この結果，アクシオンの質量領域 $m_a = 3 \sim 8$ eV でモデルを否定する結果が得られた（図6.9参照).

c. 太陽アクシオン探索

太陽の中ではアクシオンがプリマコフ効果により大量に生産される．地球でのフラックス強度は太陽モデルにあまり依存せずに$\sim 10^{12}$cm^{-2}s^{-1}(m_a/eV$)^2$ と見積もられている．このアクシオンを強磁場の中に通すとプリマコフ逆過程で，2～20 keV，平均 ～4 keV のX線を放出する．電磁場とは $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ の形で結合するので，磁場のフォトンの偏極方向成分が放出に寄与する．したがって，太陽の方向に対して垂直磁場をつくり，アクシオンがそこを通り抜ける際転換されて放出するX線を検出すればよい．転換確率 P_γ は磁場のフーリエ成分に比例する[28]．ほぼ一様な磁場の場合

$$P_\gamma(E, L) = \left| \frac{g_{a\gamma\gamma}}{2} \int_0^L dz B(z) e^{iz\Delta q} \right|^2$$

$$= \left[\frac{g_{a\gamma\gamma} BL}{2} \right]^2 \left[\frac{\sin \Delta q L/2}{\Delta q L/2} \right]^2 \qquad (6.133\,\mathrm{a})$$

Δq はアクシオンからフォトンへの縦運動量移行である．エネルギーは保存するので，$P_\gamma = \omega = E_a$ とおいて

$$\Delta q = p_{\gamma z} - p_{az} \simeq \omega - (E_a{}^2 - m_a{}^2)^{1/2} \simeq \frac{m_a{}^2}{2\omega} \qquad (6.134\,\mathrm{a})$$

となる．$\Delta qL \gg 1$ では振動が激しくなり転換率は小さくなるので，観測に有効な長さは $\Delta qL_{eff} \lesssim 1$ で与えられる．$\omega=4$ keV の場合

$$L_{eff} \sim 2\pi/\Delta q = 2\pi/(m_a{}^2/2\omega) = 2.5\mathrm{m}\left(\frac{0.01\ \mathrm{eV}}{m_a}\right)^2 \qquad (6.135)$$

これから，検出範囲はほぼ $m_a \lesssim 0.03$ に限られるが，アクシオンの通過路を誘電体にすれば質量の大きい範囲まで拡張可能である[29]．この場合誘電効果により $p_\gamma \to np_\gamma$ となるから，(6.134 a) の代わりに

$$\Delta q \sim p_{\gamma z}\left(1-\frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}-i\frac{\Gamma}{2\omega}\right)^{1/2}-(E_a{}^2-m_a{}^2)^{1/2} \sim \frac{m_a{}^2-\omega_p{}^2}{2\omega} \qquad (6.134\ \mathrm{b})$$

を使用しなければならない．$\omega_p{}^2=4\pi\alpha n_e/m_e$ はプラズマ振動数，Γ は吸収率である．したがって $\omega_p \sim m_a$ になるように気体を適当に選べば，m_a が O(eV) くらいまでは，有効長 L_{eff} を実用的な長さに保持できる．これにともなって，転換率も

$$P_\gamma = \frac{(g_{a\gamma\gamma}B/2)^2}{|\Delta q|^2+\Gamma^2/4}(1+e^{-\Gamma L}-2e^{-\Gamma L/2}\cos \Delta qL) \qquad (6.133\ \mathrm{b})$$

に変更される．1 気圧のヘリウム ($\omega_p \sim 0.3$ eV) を使って実験した例がある[31]．東京大学グループは，$L \sim 2$ m の磁石を真空容器に入れ，太陽の運動に追随できる回転台に載せた磁石望遠鏡を製作して，アクシオンを探索したが信号は検出できなかった[32]．この結果結合定数の上限値として

$$g_{a\gamma\gamma} < 6.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{GeV}^{-1} \quad 95\%\,CL \quad m_a < 0.03\ \mathrm{eV} \qquad (6.136)$$

を得た．これは球状星団の水平分岐 (HB : horizontal branch) 考察より得られているフラックス制限には及ばないものの，実測データとしては $10^{-1} \sim 10^{-6}$ eV 領域で最良の値を与える (図 6.9 参照)．

なおこのほかに，ゲルマニウムの結晶を使いブラッグ反射により検出効果を高めた検出器を用いて進行中の実験の暫定データをも載せてある[33]．

d．　マイクロ波検出器

太陽アクシオンと同じく強い磁場の中でアクシオンの転換フォトンを検出するが，10^{-5} eV 以下の質量領域で有効である．この場合，信号を抽出するアンプ (増幅器) の雑音レベルをどこまで下げられるかが勝負となる．アンプとして高速電子移動トランジスター (HEMT : high electron mobility transistor) を使用した実験が行われ，限られた範囲 ($m_a=2.77 \sim 3.3 \times 10^{-6}$ eV) ではある

がKSVZモデルを否定するだけの感度を得た[34]. このグループでは超伝導量子干渉計SQUID (super conducting quantum interference device) を使用した低雑音のアンプ[35]を開発した改良実験が進行中である. また, 京都グループも, 転換フォトンを励起してリドベリー原子とした上で検出する方法を開発し, これまた実験が進行中である[36]. どちらもKSVZのみならずDFSZモデル限界まで到達できる感度を備えており, 近いうちにアクシオンが暗黒物質の有効成分かどうかを検証できるであろう. 図6.10にリドベリー原子 (主量子数が大きい原子 ; $n \gtrsim 40$) の遷移を利用する検出器を示す[36].

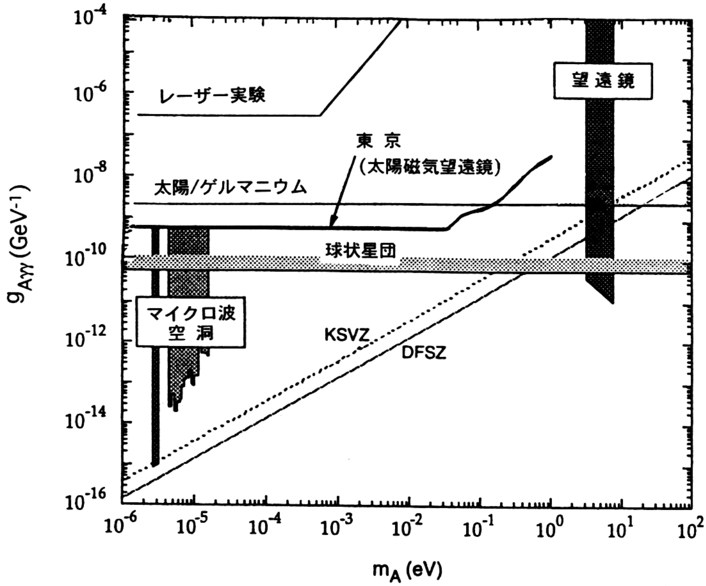


図6.9 アクシオン探索から得られた結合定数 $g_{a\gamma\gamma}$ の上限値

アクシオンの記述を終えるにあたり, アクシオンの主な性質をまとめておく.

(1) 強いCP問題の解決策として理論的な存在理由がある.

(2) スピンパリティ 0^- の擬スカラー粒子である.

(3) 真空期待値 f_A を決めれば, アクシオンの基本的性質はほぼ決まる.

(4) 質量 $m_a \sim F_\pi m_\pi / f_A$ で与えられる.

(5) クォークとの結合の強さは $\sim m_q / f_A$ である.

(6) 電磁場とは $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ の形で結合し，その強さは $g_{a\gamma\gamma}\sim\alpha/(\pi f_A)$ である．

(7) 電子との結合はモデルに依存するが，最低限 (6) を通す結合は存在する．クォークと同程度に結合が強いモデルも存在する．

(8) $m_a=10^{-5}\sim10^{-6}$ eV のときはアクシオンが暗黒物質の優勢な成分の可能性がある．

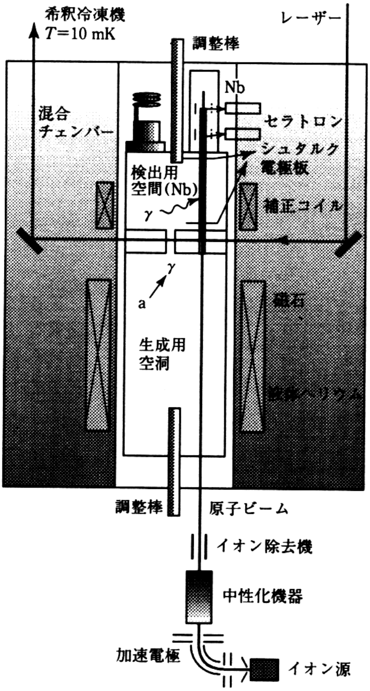


図 6.10 アクシオン検出器の例[36)]

アクシオンは生成用空洞 (Conv. cavity，共鳴周波数 2.5±20%GHz で 7 T の磁場中にある) 内でフォトンに転換され，検出用空洞 (det. cavity) に移されて，リドベリー原子 (主量子数 n) を励起する．励起された原子 $(n+1)$ はイオン化され，Ceratron で検出される．リドベリー原子は，まずイオン源からの原子を加速した後，Neutralizer で中性原子にもどしレーザーにより 3 段階で，$n\fallingdotseq40$ の準位に励起される．励起準位は電極によりシュタルク効果で微調整を行う．全空洞は 10 mK に冷やされ，検出用空洞には磁場を消すための補正コイル (Cancel. coil) を巻いてある．

$8\lesssim m_a\lesssim12\mu$eV の範囲の KSVZ はもちろんのこと DFSZ アクシオンをも検出するに十分な感度 ($g^2{}_{a\gamma\gamma}\lesssim10^{-30}$ GeV^{-2}) を有する．

6.5　電弱相互作用の相転移とバリオン数非保存[22,37]

インスタントン効果の興味ある一つの帰結は，電弱相互作用における相転移において，バリオン数保存が成立しなくなることである．電弱相互作用では，バリオン数（クォーク数）およびレプトン数のグローバル対称が存在する．しかし，電弱相互作用がカイラルカレントに結合することから，カイラル異常項によりバリオン数およびレプトン数保存が破れる．バリオンおよびレプトンカレントは，

$$J_B{}^{\mu}=\frac{1}{3}\sum \bar{q}_i\gamma^{\mu}q_i, \qquad J_l{}^{\mu}=\sum[\,\bar{l}\gamma^{\mu}l+\bar{\nu}_L\gamma^{\mu}\nu_L] \tag{6.137}$$

で定義される．カレントは，$\partial_{\mu}J^{\mu}=\partial_{\mu}J_L{}^{\mu}+\partial_{\mu}J_R{}^{\mu}$ とカイラル成分により分解できるが，アイソスピンゲージカレントは $J_L{}^{\mu}$ にのみ結合する．ハイパーチャージ（Y）を担うゲージボソン B^{μ} もまた，$Y=2(Q-I_3)$ という関係式を通じてアイソスピン部分が $J_L{}^{\mu}$ に結合する．$J_L{}^{\mu}$ はカイラル異常項を含むから，

$$\partial_{\mu}J_B{}^{\mu}=\frac{N_g g_W{}^2}{16\pi^2}\left[\mathrm{Tr}[\,\tilde{W}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}]-\frac{1}{2}\tan^2\theta_W\tilde{F}_{B\mu\nu}F_B{}^{\mu\nu}\right] \tag{6.138}$$

$$g_W=e/\sin\theta_W$$

(6.138) の右辺は全微分の形で書けるので ((6.50) 参照)，アーベルゲージ場の寄与はないが，非アーベルゲージ場の場合については，インスタントン効果により，

$$\Delta B=\int\frac{\mathrm{d}Q_B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\left[-\int J_B{}^4\mathrm{d}^3x\right]_{x_4=-\infty}^{x_4=\infty}=-N_g\nu \tag{6.139}$$

ただし，$J^4=iJ^0$, $x_4=it$ を使った．このことから，インスタントンが存在する空間をバリオンが運動すると，$N_g=3$ として

$$\Delta B=B(t=\infty)-B(t=-\infty)=3\nu \tag{6.140 a}$$

とバリオン数が保存されない．レプトンについてもまたバリオンと同じ議論ができるから，

$$\Delta L=3\nu \tag{6.140 b}$$

ただし，

$$\Delta(B-L)=0 \tag{6.141}$$

は成立している.

インスタントンによる遷移確率は,

$$\exp[-8\pi^2/g_W{}^2]=\exp[-2\pi\sin^2\theta_W/\alpha]\sim e^{-200} \tag{6.142}$$

程度であるから，バリオン数もしくはレプトン数保存が破れる確率は非常に小さく，物理的にあまり意味はない．しかし，インスタントンは，温度 $T=0$ の状態での遷移確率であり，エネルギーが電弱相互作用ポテンシャルに比べて大きいときは遷移確率も大きいと考えられる[38)]．興味があるのは，宇宙初期 $T\sim1$TeV の頃で，インスタントンの励起状態もたくさんあると考えられる．実際，ポテンシャルの頂上に位置するスファレロン（sphaleron）という解が見つけられている[39)]．もし，宇宙が熱平衡状態にあるときに，このような激しい $\Delta B\neq0$ の反応が存在すると，大統一期（エネルギー $\sim10^{15}$ GeV）に生まれたバリオン非対称（後述§8.5.1）は完全に失われる．しかし，この場合でも B-L は保存するので，B-L を破るような過程で生まれたバリオン数非対称（たとえば $SO(10)$ 大統一）は生き残る可能性がある．また，この相転移時期にバリオン数非対称の生成を求める動きもあり，非常に活発な研究の対象となっている．

参考文献

1) R.D. Peccei : The Strong CP Problem in "CP Violation", Advanced Seried on Directions in High Energy Physics, Vol. 3, ed. C. Jarlskog,World Scientific, Singapore, 1989

2) T.P. Cheng and L.F. Li : Gauge Theory of Elementary Particle Physics
M. Guidry : Gauge Field Theories, J. Wiley and Sons, Inc., 1991
L.H. Ryder : Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1985

3) K. Huang : Quarks, Leptons & Gauge Fields, 2nd. ed., World Scientific, Singapore, 1992

4) H.B. Nielsen and P. Olesen : *Nucl. Phys.*, **B61** (1973) 45, および 3)

5) G.H. Derrick : *J. Math. Phys.*, **5** (1964) 1252

6) S. Coleman : Aspects of Symmetry, Cambridge University Press, 1985, p. 265
T. Schäfer and E.V. Sharyak : *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 323

7) S. Adler : *Phys. Rev.*, **177** (1969) 2426
J.S. Bell and R. Jackiew : *Nuovo Cimento*, **60A** (1967) 47

8) V. Baluni : *Phys. Rev.*, **D19** (1979) 2227

9) S. Weinberg : *Phys. Rev*., **D11** (1975) 3583
10) G. t'Hooft : *Phys. Rept*., **142** (1986) 357
11) J. Gasser and H. Leutwyler : *Phys. Repts*., **87** (1982) 77
G. t'Hooft : *Nucl. Phys*., **B61** (1973) 455
12) R.D. Peccei and H.R. Quinn : *Phys. Rev. Lett*., **38** (1977) 1440 ; *Phys. Rev*., **D16** (1977) 1791
13) S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett*., **40** (1978) 223
F. Wilczek : *Phys. Rev. Lett*., **40** (1978) 271
14) W.A. Bardeen and S.H.H. Tye : *Phys. Lett*., **B74** (1978) 229
15) Y. Asano *et al*. : *Phys. Lett*., **107B** (1981) 159
16) S. Yamada : Proc. 1983 Int. Conf. Lepton and Photon Int. at HE., Cornell, 1983
17) J. Kim : *Phys. Rev. Lett*., **43** (1979) 103
M.A. Shifman, A.I. Vainshtain and V.I. Zakharov : *Nuc. Phys*., **B166** (1980) 493
18) M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki : *Phys. Rev. Lett*., **104B** (1981) 199
A.P. Zhitnitskii : *Sov. J. Nucl. Phys*., **31** (1980) 260
19) PDG : *Phys. Rev*., **D54** (1996) 238 ; *EPJ*, **C3** (1998) 266
20) G.G. Raffelt : *Phys. Rep*., **198** (1990) 1, "Stars as Laboratories for Fundamental Physics", U of Chicago Press, 1996
21) J. Ellis and K. Olive : *Phys. Lett*., **B193** (1987) 525
G.G. Raffelt and D. Seckel : *Phys. Rev. Lett*., **60** (1988) 1793
22) J. Engel, D. Seckel and A.C. Hayes : *Phys. Rev. Lett*., **65** (1990) 960
23) E.W. Colb and M.S. Turner : The Early Universe, Frontiers in Physics, Addison Wesley, 1990
24) J. Pres bill, M. Wise and F. Wikzek : *Phys. Lett*., **B120** (1983) 127
L. Abbott and P. Sikivie : *ibid*., 133
M. Dine and W. Fischer : *ibid*., 137
H.S. Turner : *Phys. Rev*., **D33** (1986) 889
25) J.M. Flynn and L. Randall : *Phys. Rev*., **D** (1989)
26) E. Gates *et al*. : *Ap. J*., **449** (1995) 123
27) P. Sikivie : *Phys. Rev. Lett*., **51** (1983) 1415 ; **52** (E) (1984) 695 ; *Phys. Rev*., **D32** (1985) 2988
28) G. Raffelt and L. Stodolsky : *Phys. Rev*., **D37** (1988) 1237
29) K. van Bibber *et al*. : *Phys. Rev*., **D39** (1989) 2089
30) M. Bershady *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **66** (1991) 1398
M. Russell : *Phys. Rev*., **D44** (1991) 3001
31) D.M. Lazarus *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **69** (1992) 2333
32) S. Moriyama *et al*. : *Phys. Lett*., **B434** (1998) 147
33) F.T. Avignone III *et al*. : astro-ph/9708008
R.J. Creswick *et al*. : hep-ph/9708210
34) C. Hagman *et al*. : *Phys. Rev*., **D42** (1990) 1297 ; *Phys. Rev. Lett*., **80** (1998) 2043
35) M. Muck *et al*. : *Appl. Phys. Lett*., **72** (1998) 2885
36) I. Ogawa *et al*. : Talk presented at Int. Conf. on Weak and Electro-magnetic Int. in

Nuclei, Osaka, Japan, June 12-16, 1995
S. Matsuki and K. Yamamoto : *Phys. Lett.*, **B263** (1991) 523
S. Matsuki, I. Ogawa and K. Yamamoto : *Phys. Lett.*, **B336** (1994) 573 ; *Phys. Rev.*, **D53** (1996) R1740

37) P. B. Arnold : An Introduction to Baryon Violation in Standard Electroweak Theory, in "Testing the Standard Model", Proc. 1990 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Physics, Ed. M. Cvetic and P. Langacker, World Scientific, 1991

38) V.A. Kuzumin, V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov : *Phys. Lett.*, **B155** (1985) 36

39) N. Manton : *Phys. Rev.*, **D28** (1983) 2019
F. Klinkhamer and N. Manton : *Phys. Rev.*, **D30** (1984) 2212
P. Arnold and L. McLerran : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 1020

7

磁気単極子（モノポール）[1~3]

磁石の北と南は分けられないものであろうか？　この素朴な疑問は，電磁気を学習するとき，磁荷を導入すると磁気の法則と電気の法則がほとんど1対1に対応することを知ると一層強くなる．単独の磁荷（磁気単極子またはモノポールともいう）を探そうとする試みは，ディラックが磁荷があると電荷が量子化されることを示してから急速に高まった．宇宙線の中から探したり，物質に捕捉されている可能性を探って古い鉱石や隕石，月の石を採取したりいろいろ試みられた．1974年に，ト・フーフト（G. t'Hooft）とポリヤコフ（A. M. Polyakov）が大統一対称性の破れに伴いモノポールが必然的に出現することを示して[4]，モノポールに対する認識が大いに変わった．大統一モノポールは，質量が$\sim 10^{16}$ GeVと素粒子としては極端に重くバクテリア並の質量をもつので，地表付近程度の重力でも原子からの電磁力に勝つ．したがって，モノポールは物質に捕獲されることはなく，地球に降ってきたモノポールはそのまま自由落下する．物質と束縛状態をつくれば物質はモノポールに付着して動く．モノポールをつなぎ止められるのは地球，星，銀河などの巨大天体のみである．このモノポールは空間的に広がりをもち，ディラックモノポールすなわちマクスウェル方程式の中の点電荷に対応する点磁荷とは大いに異なる構造をもつ．そこで，ト・フーフト-ポリヤコフのモノポールを学ぶ前に，ディラックモノポールについて学習して両者の類似点と差をみよう．ついで，大統一モノポールが存在すべき理由を調べ，モノポール探索状況を概観する．古典的（ディラック）モノポール探索結果については省略する．

7.1　ディラックモノポール

磁荷を導入するとマクスウェル方程式の電場 E と磁場 B の対称性がよくなる．ディラックは，もし点磁荷 g が存在すれば点電荷 e と

$$eg=2\pi n^{*1)}, \qquad n=\text{整数} \tag{7.1}$$

なる関係にあることを証明した[5]．これを見るために，いま大きさ g の磁荷が原点にあるとしよう．磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=g\delta^3(r) \tag{7.2}$$

この解は点電荷による電場と同じく動径方向を向き，強さはクーロン法則

$$\boldsymbol{B}=\frac{g}{4\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=-\frac{g}{4\pi}\nabla\frac{1}{r} \tag{7.3}$$

で表される．$\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/r$ である．このとき原点を通り半径 r の球面を貫く全磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ は，

$$\Phi=4\pi r^2B=g \tag{7.4}$$

で表される．いま，この磁場中の道筋 c を通って運動する電荷 e の粒子波動関数を考える．電磁場がないときのシュレーディンガー方程式の解を $\psi(\boldsymbol{r})$ とすれば，電磁場があるときのシュレーディンガー方程式は，$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$ と置き換えて得られ，対応する波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{r})\longrightarrow\exp\left[-ie\int_c\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]\psi(\boldsymbol{r}) \tag{7.5}$$

となることは，実際にシュレーディンガー方程式に代入してみればわかる．道筋 c として，原点を中心に，半径 r，極角 θ，方位角 $0\leqq\phi\leqq2\pi$ の閉曲線を考えよう．一周して元に戻ったときの位相変化 $\Delta\alpha$ は，

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=e\oint_c\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=e\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=e\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=e\times(\text{閉曲線 } c \text{ で囲まれる面を貫く磁束})\equiv e\Phi(r,\theta)\end{aligned} \tag{7.6}$$

---

*1)　ガウス単位系では，$eg=\hbar(n/2)$ である．有理単位系からガウス単位系に移るには

$$\frac{e}{4\pi}\longrightarrow e,\quad \frac{g}{\sqrt{4\pi}}\longrightarrow g,\quad E(B)\to\frac{E(B)}{\sqrt{4\pi}}$$

とすればよい．MKS 有理単位系では，$n=1$ の磁荷（以下ディラック磁荷といい g_D で表す）の値は 4.14×10^{-15} ウエーバーであり，また適当に単位を選ぶと $g_D=4.14\times10^{-7}$ G cm^2 または 20.6 KeV/G/cm とも書ける．G はガウスである．

$\theta=0$ のときは，面を貫く磁束はないから

$$\Phi(r, 0)=0 \tag{7.7 a}$$

である．一方，$\theta \to \pi$ にもってゆくと (7.4) から，

$$\Phi(r, \pi)=g \tag{7.7 b}$$

ところで $\theta \to \pi$ の極限で閉曲線は点に縮むから，磁束が有限値をもつ事実はポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が $\theta=\pi$ で特異点となっていることを意味する．上の議論は r のいかなる値にも成り立つから，結局特異点は，負の全 z 軸に沿って存在していることになる．これはディラックの紐といわれる．空間の回転対称性から紐はどの方向にあってもよく，また連続である限り必ずしも直線である必要もない．

波動関数の連続性を要求すると $\Delta\alpha$ は 2π の整数倍でないといけないから，$eg=2\pi n$ となり，ディラックの量子化条件 (7.1) が導けた．電荷 e はアーベルゲージ群 $U(1)$ の保存量であり原理的に連続値をとることが許されるのに自然界では量子化されている．点磁荷が自然界に存在すれば，ディラックの条件はこれに対する説明を与える．ただし，今日ではむしろ，電磁気を生む対称性が非アーベル群の一員であることにより量子化されると考えられている (§5.1.2 参照)．

磁荷がつくる磁場を与えるベクトルポテンシャルは次式で与えられる．

$$A_x=\frac{g}{4\pi}\frac{-y}{r(r+z)}, \quad A_y=\frac{g}{4\pi}\frac{x}{r(r+z)}, \quad A_z=0 \tag{7.8}$$

極座標表示では

$$A_r=A_\theta=0, \qquad A_\phi=\frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta} \tag{7.9 a}$$

これは，期待したように $r=-z$ に沿って正則でない．ディラックの紐は空間回転によって移動できる．特異点を移動して，$r=z$ に沿った線にもってゆくことも可能である．その場合のポテンシャルは

$$A_r=A_\theta=0, \qquad A_\phi=-\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta} \tag{7.9 b}$$

で与えられる．したがって，ディラックの紐は物理的に意味のある量ではない．物理的に意味のある特異点は磁荷が存在するところ，すなわち $r=0$ である．ディラックの紐による特異点を除くために次のように考える[6]．磁荷を囲

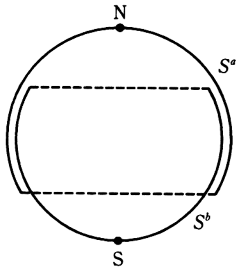


図 7.1 ディラックの紐の特異点を避ける方法　S^a と S^b で囲まれる二つの領域に分け，重なる領域ではゲージ変換でつなぐ．

む球面を，それぞれ南極と北極に穴の空いた二つの領域 S^a と S^b とに分ける（図7.1）空間 $S^a(S^b)$ 上のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{A}^b)$ はそれぞれ (7.9a) (7.9b) で定義されているとする．明らかにどちらのポテンシャルもそれぞれの領域内で正則である．重なる領域では二つの異なったポテンシャルが存在することになるが，同じ物理を記述するならば両者はゲージ変換でつながっているはずである．変換式は容易に計算できて

$$A_\mu{}^b = A_\mu{}^a - \frac{g/2\pi}{r\sin\theta} = A_\mu{}^b - \frac{i}{e}U\partial_\mu U^{-1} \tag{7.10 a}$$

$$U = \exp(ieg\phi/2\pi) \tag{7.10 b}$$

U が $\phi\to\phi+2\pi n$ で1価であることを要求すれば，ディラックの量子化条件を再現する．

(7.9) が確かに磁荷のつくるベクトルポテンシャルとなっていることを示すため，磁荷を囲む球面を貫く全磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ が正しい値 g を与えることを確かめてみる．領域 S^a と S^b の重なりをなくし，赤道面で接するとしよう．そのとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} &= \int_{S^a+S^b}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S^a+S^b}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\theta=(\pi/2)_-}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \oint_{\theta=(\pi/2)_+}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\ &= \frac{i}{e}\oint\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}(\ln U^{-1})\mathrm{d}\phi = g\end{aligned} \tag{7.11}$$

すなわちポテンシャルに特異点はないが，$\theta=\pi/2$ の平面（より一般的には磁荷を含む平面）で不連続になっている．これを（ゲージポテンシャルの）トポロジーの欠陥 (defect) という．磁荷はトポロジーの欠陥があるところに生じるという言い方をすることもある．

磁荷（ディラックモノポール）は存在すると T 保存則と P 保存則を破る．これは，電流により生成される磁場が T 変換で方向を変えるのに反し，磁荷により生成される磁場は式 (7.3) を見ればわかるように方向を変えない．ことからわかる P 変換に対しても同様な考察ができる．これは次に述べるト・

フーフト-ポリヤコフのモノポールが有限なサイズをもち P, T 変換を尊重するのと大いに異なる．ディラックのモノポールは，電荷の量子化条件や存在すればマクスウェルの方程式が，$e \leftrightarrow g, E \leftrightarrow B$ の双対称性をもつなどの審美的な理由により，昔から探索されてきた．しかし，ディラックモノポールには存在しなければならないという必然性はない．一方，ト・フーフト-ポリヤコフモノポールは大統一理論が正しいならば存在しなければならないので，実験的に追求する価値がある．

7.2　ト・フーフト-ポリヤコフモノポール

7.2.1　はりねずみポテンシャル

前章で2+1次元空間にヒッグス場と電磁場が共存して，ゲージ不変性が破れるとソリトンが現れ，それが量子化された磁束を表すことを見た．したがって3+1次元空間のソリトンとしてモノポールが現れるであろうという期待を抱かせる．ソリトンが存在するためには，縮退真空が存在しないといけない．縮退真空をつくるために自発的に対称性をこわした後にも，電磁場が存在するためには $U(1)$ 対称性が残っていないといけないから，モノポールと電磁場が共存するためには，出発点としては $U(1)$ より大きい対称性をもつ場を採用しなければならない．すなわち非アーベルゲージ場を考慮しなければならない．3次元空間に物質場とヤン-ミルズ場が共存し，対称性の自発的破れが発生すると，ソリトン場としてのモノポールが出現することを，$SO(3)$ 対称性の場合について示そう．アイソスピン1をもつヒッグス場 ϕ^a $(a=1,2,3)$ とやはりアイソスピン1をもつゲージ場 $F^a{}_{\mu\nu}$ が共存し縮退真空をつくるときのラグランジアンは，

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a-V(\phi) \tag{7.12 a}$$

$$V(\phi)=\frac{\lambda}{4}(\phi^2-v^2)^2 \tag{7.12 b}$$

$$F^a{}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu-e\varepsilon^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu \tag{7.12 c}$$

$$D_\mu\phi^a=\partial_\mu\phi^a+e\varepsilon^{abc}A^b{}_\mu\phi^c \tag{7.12 d}$$

で与えられる[*2)]．これより運動方程式をつくると，

$$D_\mu F^{a\mu\nu}=e\varepsilon^{abc}\phi^b D^\nu\phi^c \tag{7.13 a}$$

$$D_\mu D^\mu\phi^a=-\lambda(\phi^2-v^2)\phi^a \tag{7.13 b}$$

静的な解を扱うためゲージ場の時間成分をゼロとおくゲージ（temporal gauge）を採用する．ゲージ場をこのように設定できることは§6.1.5で議論した．ソリトンが存在するためには，エネルギー積分が有限でなければならない．$r\to\infty$ で，$V(\phi)$，$F^a{}_{\mu\nu}$，$D_\mu\phi^a$ の各項が $O(1/r^2)$ で0になれば条件は満たされるので，次のような境界条件を設定し，関数 $G(r), H(r)$ を次式で定義する．

$$A^a{}_0=0, \qquad A^a{}_i=-\varepsilon^{iab}\frac{\hat{r}^b}{er}G(r) \tag{7.14 a}$$

$$\phi^a=v\hat{r}^a H(r) \tag{7.14 b}$$

$\hat{r}\equiv \boldsymbol{r}/r$ は動径方向の単位ベクトルである．F, G は境界条件

$$G(0)=0, \qquad G(\infty)=1 \tag{7.15 a}$$

$$H(0)=0, \qquad H(\infty)=1 \tag{7.15 b}$$

を満たすものとする．この ϕ や A_μ は動径方向を向き，アイソスピン空間の成分と時空の成分が混合するというきわめてユニークな特徴をもつ．$\boldsymbol{r}$ の動きにともなってアイソスピン空間でもあらゆる方向を向く．ポリヤコフはこれを針ねずみ（hedgehog）と呼んだ．ゲージポテンシャルは $O(1/r)$ であるから $F^a{}_{\mu\nu}$ は $O(1/r^2)$ である．$r\to\infty$ で $D_i\phi^a=0$ となることは，実際に計算してみると

$$\begin{aligned} D_i\phi^a &\longrightarrow v\partial_i\left(\frac{r^a}{r}\right)+e\varepsilon^{abc}A^b{}_i v\hat{r}^c \\ &=v\left[\frac{\delta^{ia}}{r}-\frac{\hat{r}^i\hat{r}^a}{r}-\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ibd}\frac{\hat{r}^d\hat{r}^c}{r}\right]=0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

であり，確かにそうなっている．これで，$r\to\infty$ で $\phi\to$ 定数となりソリトンの存在のための必要条件（縮退真空とエネルギーの有限性）が設定できた．あとは，$G(r), H(r)$ の満たす運動方程式を解く問題になる．

ここで，F^a はヤン-ミルズ場でありアイソスピン空間で3成分をもつが，対称性が自発的に破れたとき通常の電磁場になるように設定する．物理的に理解しやすいように，以下 $\phi(r\to\infty)=\phi_U=(0,0,v)$ と設定するユニタリーゲー

*2) 非アーベル場ゲージ変換の詳細についてはII-第2章を参照せよ．

ジで考察する．このときアイソスピン第3軸の周りの回転は真空を不変に保つから $F^3{}_{\mu\nu}$ が電磁場となる．$F^{1,2}{}_{\mu\nu}$ は電荷をもつゲージ場で（$W^\pm$ と呼ぶことにする），ヒッグスの第1，2成分を吸収して質量を獲得する．ユニタリーゲージで $F^3{}_{\mu\nu}$ を拾いだし，かつアーベル電磁場になるようにするために

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{|\phi|}\phi^a F^a{}_{\mu\nu}-\frac{\varepsilon_{abc}}{e|\phi|^3}\phi^a(D_\mu\phi^b)(D_\nu\phi^c) \tag{7.17}$$

とおく，ユニタリーゲージでは

$$F_{\mu\nu}=F^3{}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^3{}_\nu-\partial_\nu A^3{}_\mu-e(A^1{}_\mu A^2{}_\nu-A^2{}_\mu A^1{}_\nu)$$

となるので，第3項を除去するためユニタリーゲージで $A^3{}_\mu$ のみが拾い出せるような組み合わせ

$$A_\mu=\frac{1}{|\phi|}\phi^a A^a{}_\mu \tag{7.18}$$

をつくり，$F_{\mu\nu}$ との関係式を求めると

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\mu A_\nu-\frac{1}{e|\phi|^3}\varepsilon_{abc}\phi^a(\partial_\mu\phi^b)(\partial_\nu\phi^c) \tag{7.19}$$

が得られる．通常の電磁場の関係式とは第3項の付加項だけ異なるが，対称性が自発的に破れて ϕ がアイソスピン空間で固定されれば消えるので，この A_μ と $F_{\mu\nu}$ をもって電磁場と同一視してよいであろう．

ここで設定した $\phi=\phi_U$ は，(7.14) で与えた $\phi=\phi_C=v(x/r, y/r, z/r)$ と異なるが，両者は ϕ 空間の回転すなわちゲージ変換

$$\phi_C=U\phi_U,\quad U=e^{-i\phi t_z}e^{-i\theta t_y}e^{i\phi t_z} \tag{7.20 a}$$

$$A_C{}^a{}_\mu t_a=UA_U{}^a{}_\mu t_a U^{-1}-\frac{i}{e}U\partial_\mu U^{-1} \tag{7.20 b}$$

で結びついている．t_a は $SO(3)$ の生成演算子行列である．ユニタリーゲージでのポテンシャルを，(7.9) で定義したディラックポテンシャル $A_{D\mu}$ に等しいとおいて，$A_U{}^{1,2}{}_\mu=0$，$A_U{}^3{}_\mu=A_{D\mu}$，$g/4\pi=1/e$ を (7.20 b) に入れれば，針ねずみポテンシャルが得られる．針ねずみポテンシャルは，$\partial_i A^a{}_i=0$ を満たすからクーロンゲージでのポテンシャルである．クーロンゲージでは，質量0の電磁場がいくつあるのか，どの組み合わせが電磁場になるのかなど明確でないが，ユニタリーゲージでは物理的解釈が容易である．(7.17) で定義した $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変な形をしているから，ユニタリーゲージで物理的描像を理解

した後で計算はクーロンゲージで行っても物理的結果は変わらない．

ここで，漸近形 (7.14) を入れると $A_\mu=0$ となるので電磁場への寄与はヒッグス場からのみとなり，電磁場の $r\to\infty$ での漸近形は

$$F_{0i}=0, \qquad F_{ij}=-\frac{\varepsilon_{ijk}\hat{r}^k}{er^2} \tag{7.21}$$

となる．すなわち，電場 $\boldsymbol{E}$ が存在せず，動径方向の磁場

$$\boldsymbol{B}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{er^2}=\frac{g}{4\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}, \qquad \boldsymbol{E}=0 \tag{7.22}$$

が存在する．磁荷の値は $g=4\pi/e$ である．ディラックモノポール磁荷 g_D の 2 倍の値であるが，これは $SO(3)$ が 2 重連結の群構造をもつことに由来するので（付録 (A. 18) 参照）一般的に成り立つ話ではない．物理的な言葉で言えば，$SO(3)$ 対称性が破れて $\phi=(0,0,v)$ になったとき残っている対称性演算は，アイソスピン空間第 3 軸の周りの回転 $\exp(i\alpha I_3)$ である．これが電磁場の $U(1)$ 変換 $\exp(i\alpha Q)$ を与えるから，$Q=I_3$ である．電荷の最小単位はアイソスピン 1/2 の物質場がもつ電荷 $Q=e/2$ となるので，磁荷の最小単位が $2g_D$ になるのである．一般に磁荷の最小単位はゲージ群の構造に依存し，可能な最小電荷の逆数の 1/2 となる*3)．

7.2.2　モノポールの質量

このモノポールはディラックのモノポールとは違う．$r\to\infty$ で磁荷と同じ磁場をつくるからモノポールという名前を与えられているが，$r\lesssim 1/ev$ では点磁荷とは異なる磁場をつくる．また，ト・フーフトは $G(r), H(r)$ が変数の全領域で正則であることを示した．$\lambda\to 0$ の極限では解析的な解も求められている[7]．すなわち，ディラックのモノポールと違い，この磁場をつくるポテンシャルは特異点をもたず，$r=0$ においても正則である．特異点はゲージ変換でヒッグス場に吸収されたことになる．モノポールの質量は数値的に計算することができて[8]，

$$M=\frac{4\pi}{e^2}evf(\lambda/e)\simeq 100\times(\text{ベクトルボソンの質量}) \tag{7.23}$$

$$f(0)=1, \qquad f(\infty)=1.787$$

*3)　閉じ込めがあればこの限りではない．

で与えられる．ここでベクトルボソンとは，対称性の破れにともない質量を獲得したゲージ粒子 $W^{\pm}$ を指す．もし対称性の自発的破れが，後に述べるように大統一スケール～10^{15} GeV で起きるならば，モノポールの質量は～10^{17} GeV となり非常に大きい．

7.2.3 磁　　流

もともとのラグランジアンには電荷しか存在しないのに，どうしてモノポールが存在するような場の配置が構成できたのであろうか？　モノポールの起源を探るために，磁流（磁荷の流れ）を次式で定義する[9]．

$$K^{\mu} \equiv -\partial_{\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\nu}F_{\rho\sigma} \tag{7.24}$$

これは，マクスウェルの方程式で電流 J^{μ} が

$$J^{\mu} = -\partial_{\nu}F^{\mu\nu}$$

を満たすので，$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ の置換により磁流を定義するのである．マクスウェル方程式では，K^{μ} は恒等的にゼロである．(7.19) から，

$$K^{\mu} = \frac{1}{2e}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}\partial_{\nu}\hat{\phi}^{a}\partial_{\rho}\hat{\phi}^{b}\partial_{\sigma}\hat{\phi}^{c} \tag{7.25}$$

が導ける．ここで，$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi}/|\phi|$ を定義した．すなわち，磁流はヒッグス場が発生させていることがわかる．しかも上の形からわかるように，磁流は保存する．

$$\partial_{\mu}K^{\mu} = 0 \tag{7.26}$$

これは，前章 (6.18) で導いたキンクのトポロジー荷と同じくトポロジーすなわち境界条件で保存するカレントであり，対称性の存在から導けるネーターカレントではない．モノポールは二つの真空にまたがる解なのでトポロジー的に安定な構造をもつのである．保存量を Q_M と書き $g = 4\pi/e$ を入れれば

$$Q_M = \int K^0 \mathrm{d}^3x = \frac{g}{8\pi}\int \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\partial_i\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c \mathrm{d}^3x \tag{7.27}$$

これは，(A. 13) で定義したホモトピークラスを指定する巻つき数であり，$Q_M = ng$ を与える．$\phi = \phi_U$ のとき $n=0$, $\phi = \phi_C$ のとき $n=1$ を与える．

(7.25) を眺めれば磁流は 3 個のヒッグス粒子の複合体によりつくられていることがわかる．ユニタリーゲージで考えれば，モノポールは $W^{\pm}$ と中性ヒッグス粒子の複合体であるというイメージがはっきりする．

7.2.4　モノポールの存在条件

上記の議論は，$SO(3)$ 対称性が自発的に破れて $U(1)$ 対称性が残るとき，モノポールが発生することを示したものである．しかし，残念ながら自然の尊重するゲージ対称性は $SO(3)$ ではない．そこで，モノポールが存在するために対称性に課せられる条件を調べてみよう（付録 A の議論参照）．モノポールが存在するためには縮退真空が存在すること，すなわち

$$\phi(r \to \infty)=v, \qquad V(v)=0 \tag{7.28}$$

を満たす v の値が複数個存在することである．今，対称性 G を満たすゲージ場とヒッグス場があり，対称性 G が自発的に破れて ϕ が上記の真空配位をとるとき，残された対称性を H とする．v の選び方は G から H を取り除いた分だけある．これを剰余空間（coset）と呼び G/H で表す．$G=SO(3)$ では，真空配位のとり方は，$\phi\cdot\phi=v^2$ を満たす ϕ の自由度だけあった．その空間は，3 次元 ϕ 空間の中の球面で表される．すなわち $SO(3)/U(1)$ は S^2 と同じトポロジーをもつ．$r=\infty$ は時空の球面であるから，その自由度はやはり S^2 の空間である．したがって (7.28) は，$SO(3)/U(1)$ の場合，時空 $(S^2) \to$ 群空間 (S^2) への写像を表す．異なる写像が連続変換で互いに一致させられるとき，同じホモトピークラスに属するという．すべての写像が一つのホモトピークラスに属するときはモノポールは存在しえない．これを

$$\pi_2(G/H)=0 \tag{7.29 a}$$

と書く．$S^2 \to S^2$ の写像は (7.27) で定義される巻つき数（整数）で指定されるホモトピークラスに分けられるので，

$$\pi_2(S^2)=Z \tag{7.29 b}$$

と書く．これらの議論から，モノポールの存在条件は時空の S^2 から群への射影が異なるホモトピークラスをもつこと，すなわち $\pi_2(G/H)\neq 0$ であることがわかる．以下の議論で必要になるのはホモトピー論における次の定理である．

$$\pi_2(G/H)=\pi_1(H) \tag{7.30 a}$$

$$\pi_n(S^n)=Z, \qquad \pi_n(S^m)=0 \quad n<m \tag{7.30 b}$$

$\pi_n(S^m)$ は，$S^n \to S^m$ へのホモトピー分けを表す．π_1 は 2 次元空間の球面すなわち円 (S^1) の群 H への写像のホモトピークラス分けである．$H=U(1)$ の場合についてはすでに§6.1.3 で議論した．整数で表される巻つき数でクラス分

けできる．すなわち

$$\pi_1(U(1))=Z \tag{7.31}$$

である．これから（準）単純でコンパクトな群 G の対称性を満たす非アーベルゲージ場とヒッグス場が共存し，対称性が自発的に破れて $U(1)$ が残るときは，常にモノポールが発生する条件が整うことがわかる．標準理論ではモノポールが発生しないが（付録 A 参照），大統一が存在して $SU(5)$ のような単純群 G としての対称性を満たすならば，最初に（すなわち大統一エネルギーで）対称性が自発的に破れて $U(1)$ が残るときにモノポールが発生するのである．ディラックのモノポールと違い，大統一が存在するならば，モノポールは存在しなければならないのである．

7.3　大統一モノポールの性質

7.3.1　質量とサイズ

大統一モノポールは対称性の破れたヒッグス場すなわち質量を獲得したゲージ場の複合体であり，質量は大統一のベクトルボソン（X, Y；第 5 章参照）のもつ質量に磁荷の強さの逆数を掛けた程度である．

$$M\simeq\frac{g_5 v}{\alpha_5}\simeq\frac{M_X}{\alpha_5}\simeq 10^{17}\,\mathrm{GeV} \tag{7.32}$$

ここに，α_5 は大統一の結合定数の大きさである．素粒子としては異様に大きな値であり，加速器でつくることは不可能であるが，ビッグバン時に生成されて残っている可能性はある．

モノポールは点粒子ではなく複合体であり，その大きさはベクトルボソンのコンプトン波長程度すなわち

$$\lambda\sim\frac{1}{g_5 v}\sim\frac{1}{\alpha_5 M}\sim 10^{-30}\,\mathrm{cm} \tag{7.33}$$

くらいに広がっている．実際，式 (7.13) の解 G が，$r\to\infty$ で $1-\exp(-evr)$ の漸近形をもつことが証明できる．この小さな空間の中にベクトルボソンが閉じ込められていて，しかも自らの 100 倍もの質量を生み出しているのであるから非常な高温状態である．中心 $(r=0)$ では $\phi=0$ であるから対称性

が回復している．外の真空との間には中間温度層が存在するはずであるから，そこには W や Z ボソンが，さらに外側にはクォークグルーオンプラズマも存在するであろう（図7.2）．モノポールは非常に複雑な構造をしていると考えられる．上記サイズは X, Y 粒子で構成される芯のサイズであり，全体としてはハドロン程度の大きさをもつと考えられる．外皮がクォークやグルーオンの集合体ならば，強い力が働くであろう．すなわちモノポールは物質と強い相互作用をする可能性があると考えられる．

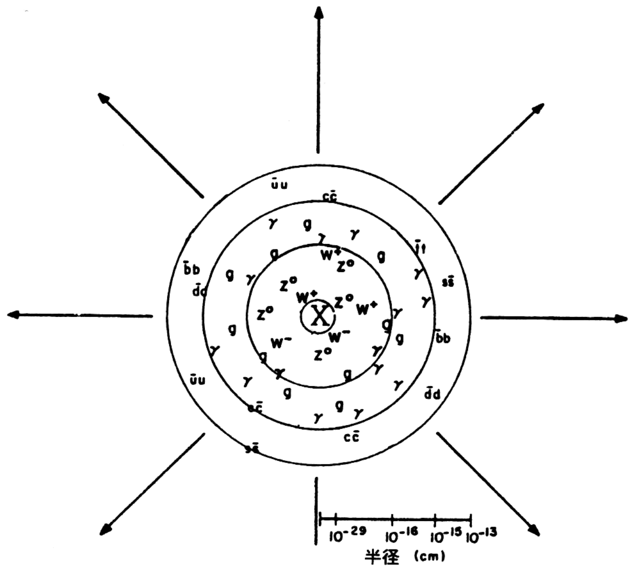


図7.2 大統一モノポールの玉ねぎ構造
中心に X, Y などがあり，外側にいくにつれ温度が下がり，電弱相互作用の領域，閉じ込めの領域が続く．

7.3.2 触 媒 作 用

モノポールは W, Z, X, Y ゲージボソンを内包しているから，物質と相互作用をすると弱い相互作用や大統一による相互作用を誘発する．特に興味あるのは後者で，モノポールが物質と反応して核子崩壊を引き起こす（ルバコフ-カラン効果）[10]．モノポールの触媒作用による陽子崩壊断面積は，β の小さいところで[11],

$$\sigma_c \sim \sigma_0/\beta^2 \qquad \text{陽子} \qquad (7.34\,\mathrm{a})$$

$$\sim \frac{F(Z,\beta)}{\beta}\sigma_0 \qquad Z>1\ \text{の原子核} \qquad (7.34\,\mathrm{b})$$

β はモノポールと陽子の相対速度，σ_0 は典型的な強い相互作用断面積であり，$F(Z,\beta)$ は反応相手の原子核により変わる因子 ($10^{-2}-10^{-6}$) である．奇数スピンをもつ原子核 (例えば ^{27}Al) で比較的大きく，酸素のようなスピン 0 の原子核で小さい．ただし，モノポールの触媒断面積に関してはいろいろな計算があり，不定性が大きい．ゼロ値を与えるモデルもある．

7.3.3 アイソスピンのスピンへの転化

このほかにもモノポールはいろいろ興味ある性質をもつ．例えば，針ねずみポテンシャルが示すように，モノポールはアイソスピン空間と時空を混合させる性質をもつ．アイソスピン 1/2 のボソンを捕獲するとその束縛状態は，フェルミオンが存在しないにもかかわらず半奇数のスピンをもつ[3,12]．

7.4 モノポールと天体物理学

7.4.1 モノポールの速度

ビッグバンから取り残されたモノポールが宇宙に存在しているとして，その速度分布と数分布に対する制限を天体物理学を使って考察する．他から力を受けないとすれば，温度は$\sim 10^{-5}$ mK$\sim 10^{-12}$ eV であるので，質量を 10^{16} GeV とすると $\beta \sim 10^{-18}$ となる．したがって実際の速度は重力もしくは磁力により加速されて得られたものであり，銀河もしくは銀河団などの天体に束縛されている可能性がある．重力によるビリアル速度 (付録 B.4 参照) は束縛中心の天体質量に依存する．銀河や銀河団のビリアル速度は $\beta \sim 10^{-3}$ 程度である．銀河中心から太陽系の距離の周回速度がほぼ $\beta \sim 10^{-3}$ であるが，これは銀河からの脱出速度の 80%であり，また銀河団からの脱出速度よりほんの少し小さい程度である．したがって，モノポールは大体この程度の速度をもっていると考えられる．もちろん銀河磁場の加速などによりこれより大きくなっている可能性はある．もし，太陽に束縛されているとすると $\beta \sim 10^{-4}$，地球に束縛さ

れているとすると $\beta\sim4\times10^{-5}$ 程度であるので，モノポール探索にあたっては，速度範囲を広げるのが望ましい．

7.4.2　フラックス制限

a.　銀 河 磁 場[13)]

銀河内には 2〜5 μG（ガウス）の磁場が存在する．これはファラデー回転やダストによる光の偏極，宇宙線によるシンクロトロン電波などで見積もる．磁場構造はうず巻きに沿う傾向がみられる．うず巻きの腕の回転速度の違いが磁場を引き延ばしてさらに磁場を新しくつくるので，磁場の再生周期は銀河の周回周期（$\tau_G\sim1$ 億年）程度である．モノポールが存在すれば銀河磁場により加速される．逆に言うと銀河磁場のエネルギーが消費され磁場が弱くなる．銀河内に磁場が存在する事実がモノポールフラックスに制限を与える．

一様な磁場が存在する領域の大きさ L は，大体 10^{21} cm（300 pc：パーセク）程度と見積もられている．モノポールがこの領域を通過すると加速もしくは減速され，エネルギー差 $\Delta E=gBL$ を生む．銀河（半径 r_G）を横断する間に N 個の領域を通過するとすれば，全体としては乱雑に加速もしくは減速され，平均としては $\sqrt{N}\Delta E$ だけのエネルギーを奪うであろう．すなわち 1 個のモノポールが銀河を横断するとき銀河の失うエネルギー損失 δE は，

$$\delta E=\sqrt{N}\Delta E=\sqrt{N}gBL \tag{7.35}$$

モノポールフラックスを F とすれば，銀河を通過するモノポールの数の割合は $(4\pi F)(\pi r_G{}^2)$ である．N は $\sim r_G/L\sim30$ kpc/300 pc~100 程度であるから，モノポール通過による全エネルギー損失率は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=(4\pi F)(\pi r_G{}^2)\sqrt{\frac{r_G}{L}}(gBL) \tag{7.36}$$

で与えられる．これが銀河磁場エネルギー生成率 $(B^2/2)(4\pi r_G{}^3/3)/\tau_G$ を超えないという条件から，次のパーカー制限を得る．

$$F\lesssim10^{-15}\,\mathrm{cm^{-2}sr^{-1}s^{-1}}\left(\frac{B}{3\mu\mathrm{G}}\right)\left[\frac{r_G}{30\,\mathrm{kpc}}\frac{300\,\mathrm{pc}}{L}\right]^{1/2}\left(\frac{30\,\mathrm{Myr}}{\tau_G}\right) \tag{7.37}$$

この式は，磁場による加速で得た速度 $\Delta v=(gBL/(Mv))$ が元の速度 v と同程度に強いときに成立する．モノポールが 10^{16} GeV より重いと $\Delta v\ll v$ とな

り，エネルギー損失は 2 次効果となる．この場合

$$\delta E \propto <(1/2)M\{(v+\Delta v)^2-v^2\}> = M(\Delta v)^2/2 \sim 1/M$$

の依存性をもつので，$M>10^{16}$ GeV では $F \to F$ ($M/10^{16}$ GeV) となるが，この領域では次に述べる宇宙のエネルギー密度からの制限の方がきつくなる．

銀河団内にすなわち銀河間に磁場が存在すれば，パラメターをスケールするだけで全く同じ議論ができる．実際，密集銀河団からの拡散 (diffuse) 電波の観測データは，銀河間にも 0.01～1μG の磁場が存在することを示唆する．この場合，$r_G \to$ 銀河団サイズ，$L \to$ 銀河サイズ，$\tau_G \to$ 銀河年齢（～10^9 年）として，制限は 2～3 桁ほどきつくなる[14]．

b. 宇宙のエネルギー密度

宇宙の相対エネルギー密度を $\Omega(=\rho/\rho_c)$ と書く．

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9\times 10^{-29} h^2 \mathrm{gr/cm^3} \simeq 10^4 h^2 \mathrm{eV/cm^3} \tag{7.38}$$

$H^0 = 100h$ km/sec/Mpc, $\quad h = 0.6\sim 0.8$

G：万有引力定数

H_0 はハッブル定数であり，h は不定性を表す．宇宙のエネルギー密度は $\Omega \lesssim 1$（より正確には $h^2\Omega \lesssim 1$ がわかっている)，バリオン密度は $h^2\Omega_B = 0.02 \pm 0.004$ と見積もられている（第 8 章参照)．モノポールは，トポロジーの欠陥として現れるので生成当時の地平線内に 1 個程度はつくられたであろう．非常に重いので消滅しにくく，標準的な宇宙論で計算すると少なくもバリオンと同程度に存在しなければならないが，上の数字は宇宙論によるモノポール数密度推定値が 14 桁以上大きすぎることを示している．この事実は，インフレーションモデル提案の動機となった．

モノポールが速度 v，数密度 N で乱雑に運動しているとすれば，モノポールフラックス F は $Nv/4\pi$ で与えられる．モノポールが現在の宇宙密度を超えない条件 ($h^2\Omega_M<1$) が一つの制限を与える．

$$F < 10^{-15}\,\mathrm{cm^{-2}sr^{-1}s^{-1}} \left(\frac{\beta}{10^{-3}}\right)\left(\frac{10^{16}\,\mathrm{GeV}}{M}\right) \tag{7.39}$$

$M>10^{16}$ GeV ではパーカー制限よりきびしい制限を与える．ただし，あまり質量が大きくなると磁場による加速が小さくなり，宇宙年齢をもってしても β

$\sim 10^{-3}$ にまで到達させることはできないので，上記の制限は，$M<10^{19}$ GeV で有効である．

c.　中性子星内のモノポール触媒作用

時間 τ の間に中性子星に捕捉されるモノポールの数 N_M は，半径を R として

$$N_M = 4\pi F \pi R^2 \tau [1+(\beta_{esc}/\beta_\infty)^2] \tag{7.40}$$

で与えられる．β_{esc} (~ 0.3) は表面からの脱出速度であり，β_∞ は星から十分離れたところでの速度である．$\beta_\infty = 10^{-3}$ とすると括弧内の数は $\sim 10^5$ となる．ほとんどのモノポールは芯に定着する．モノポールに触媒作用があるとし，物質との反応断面積を σ_c とすると，触媒作用による物質の核子崩壊率は $N_A \rho v \sigma_c$ で与えられる．N_A はアボガドロ数，ρ は物質の密度である．$\sigma_c = 1$ mb，$\beta \sim 0.3$，$\rho = 3\times 10^{14}$ g/cm^3 と設定すると，中性子星の芯の中での1個のモノポール触媒作用によるエネルギー発生率は，

$$P = m_n N_A \rho \beta \sigma_c \approx 240 \text{ GW（ギガワット）} \tag{7.41}$$

モノポールは大量のエネルギーを発生することがわかる．このうちの一部または相当部分が光もしくはX線などの形で放出されるはずである．中性子星のX線輝度の年齢依存性（若ければ中性子のエネルギーはもっぱらニュートリノが持ち去る）や上限値から，モノポールフラックスへの制限が得られて，

$$F/(\beta\gamma) < 3\times 10^{-24} \left(\frac{1\text{mb}}{\sigma_c}\right) \text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{s}^{-1} \tag{7.42}$$

と見積もられている[15]．β は年とった中性子星内のモノポールの速度で，$\beta \sim 0.1\sim 0.3$，$\gamma (1\sim 10^4)$ は光輝度の全エネルギー放出に占める割合である．モノポールの質量が小さくなると重力より電磁力が勝ち，中性子星のもつ磁場によりモノポールの軌道は曲げられて捕獲されなくなるので，上の値は，$M < 10^{14}$ GeV では成立しない．

7.5　モノポール探索[2)]

モノポールの検出には，モノポールのもつ特徴すなわち磁荷 $g=2\pi n/e$ と速度 $\beta \sim 10^{-3}$ をもつという事実を利用する．モノポールがコイルの中を通過する

ときに電流が誘起される事実を使う磁気誘導法とモノポールと物質との相互作用（イオン化損失など）を検出する方法とに大別される．前者はモノポールの質量，速度そして電荷[*4)]によらず磁荷の存在のみを検出するという利点をもつが，大きなコイルはつくりにくい，後者には $\beta \lesssim 10^{-3}$ のときのイオン化損失に理論的不定性があるものの大立体角のとれる大型検出器をつくりやすいという利点がある．

7.5.1 磁気誘導検出器

Δt の間にモノポール1個がコイルの輪を通り抜けるとファラデーの法則により，

$$\Delta\Phi = g = \Delta BS = V\Delta t = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\Delta t \tag{7.43}$$

で与えられるだけの電流 I が発生する．$\Delta\Phi(\Delta B)$ は磁束（密度）の変化，S はコイルの面積，V は誘起電圧，L はコイルのインダクタンスである．半径 a の針金でつくった半径 R のコイルのインダクタンスは

$$L = R\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right) \tag{7.44}$$

で与えられる．例えば，$a=250\mu\mathrm{m}$，$R=1\,\mathrm{m}$ とすると $L=10\,\mu\mathrm{H}$ となり，$\Delta\Phi = g_D = 4.14\times10^{-15}$ ウエーバーに対して，0.4 nA ($\mathrm{nA}=10^{-9}\,\mathrm{A}$) の電流が流れる[16)]．これは小さな値であるが，超伝導量子干渉計SQUID（super conducting quantum interference device）を使えば検出可能である[*5)]．しかし上記の磁束変化は地球磁場 (0.3 G) が10^{-11}程度変化したときと同程度の信号を与えるので，厳重な磁場遮蔽が要求される．1982年にカブレラ（B. Cabrera）[17)] が，この方法で信号を検出して大きな話題となり，世界中で大がかりなモノポール探索を始めるきっかけとなった．その後の追試では，単独コイルで信号を得ることはあっても二つのコイルの同時計測での信号はついに得られなかった．磁

[*4)] 電荷をもつモノポールをダイオン（dyon）という．

[*5)] 超伝導はクーパー対により引き起こされる．超伝導体ループの中の磁束は量子化されている．クーパー対は電荷 $2e$ をもつので，SQUID の中で量子化される磁束の最小単位は $\phi_0 = g/2$ である．したがって磁荷 g をもつモノポールの通過により $2\phi_0$ の磁束飛躍が誘起される．

気誘導法により得られたモノポールフラックスの限界は，図 7.4 に他の実験データとともに与えてある[18].

7.5.2　イオン化損失を使う方法

a.　シンチレーションカウンターと比例係数管

速度 β で動くモノポールは，軌道に垂直な方向に電場をつくり，物質中の分子原子を励起ないしはイオン化する．イオン化によるエネルギー損失は

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_m=\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_e\left(\frac{g}{e}\right)^2\beta^2 \tag{7.45}$$

で与えられる[19]．添字は磁荷 (m) もしくは電荷 (e) によるエネルギー損失を表す．$(g/e)^2=4700$ であるので，相対論的モノポールは非常に大きなイオン化損失を与える．通常の荷電粒子によるイオン化損失の式（ベーテ-ブロッホの式）は，β が 0.03 程度より小さいと成立しないので計算がし直された（図 7.3 (a)）．特に以下に述べるドレル-ペニング効果は，モノポール探索に有力な手段を提供する[20]（図 7.3 b）．ドレル効果とはモノポールが通り過ぎると，近傍の電子のもつ角運動量が変化し，この結果として生じる原子内電子のレベル混合によって励起されることをいう．角運動量が変化することは次のようにしていえる．電荷 q，質量 m をもつ粒子が原点にあるモノポールの近傍を動くとき，受ける力は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=q\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}$$

したがって軌道角運動量変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{qg}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{n\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)$$

最後の式を導くときにディラックの量子化条件を使った．これから保存量としての全角運動量 $\boldsymbol{J}$ としては，次式を使わなければならないことがわかる．

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}-n\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{7.46}$$

第 2 項は電磁場の角運動量が電子に移されることにより生じる効果である．原子内の電子の静止系で，モノポールが $z=-\infty$ から $+\infty$ に動けば，$\Delta J=1$ の角運動量移行が生じ，原子が励起されるのである．シンチレーションカウンターは原子がイオン化された場合にしか感じない．しかし，ある種の比例係数

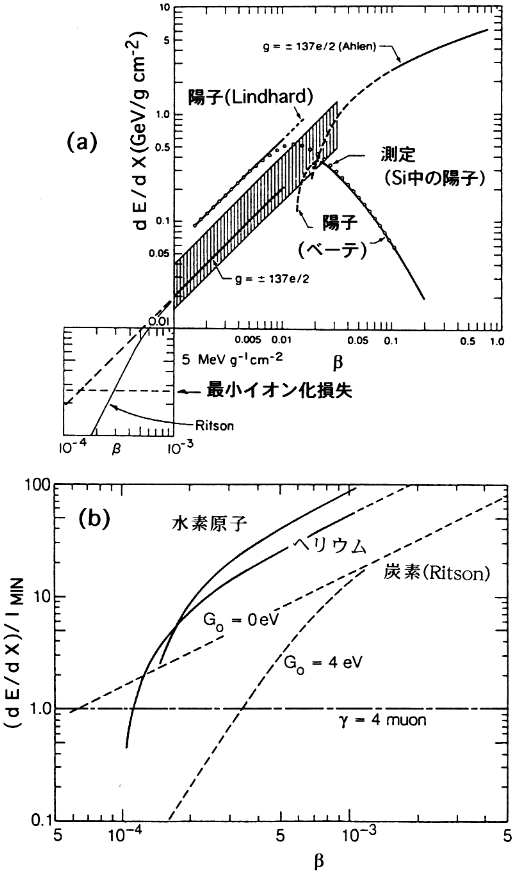


図 7.3　モノポールのエネルギー損失
(a)　Ahlen, Lindhard, Ritson の計算[19]
(b)　Drell らの計算（実線）[20] と Ritson の計算
G_0 は励起状態とのエネルギーギャップ

管は封入気体としてヘリウムとクエンチ用 n-ペンテンなどの混入気体を使用する．この場合励起ヘリウム（励起エネルギー＞20 eV）と n-ペンテンの衝突により励起エネルギーが n-ペンテンに移行する（ペニング効果）．n-ペンテンは浅いイオン化ポテンシャルをもっているので（～10 eV），結果的にイオン化電子が放出され検出可能となる．したがってドレル-ペニング効果の使用可能な比例係数管とシンチレーションカウンターは分けて考察する必要がある．シンチレーションカウンター（主たる素材は炭素）では，$\beta \gtrsim 10^{-3}$ 付近がほぼ検

出限界となるが，比例計数管ではペニング効果を使えば $\beta \gtrsim 10^{-4}$ まで到達可能である．

b.　エッチング軌跡検出器

粒子が固体物質を通過すると放射線損傷を残すことを利用するイオン化損失検出器の一種であるが，電子回路などの能動素子を使わないので大面積をつくりやすいこと，過去の記憶を蓄積することが可能などの利点がある．損傷部位が長期間残ること，したがって大きなイオン化作用をもつ粒子（Z の大きな原子核など）に対して検出効果が大きく，また電気的に不良導体もしくは絶縁体であることが条件である．実際に使われる素材としては，ニトロセルローズ(硝綿) とか高分子炭水化物のレキサン (lexan)，CR 39 などがある．モノポールの場合は，基本的には β の大きい場合か Z の大きな原子との束縛体が対象となるが，CR 39 に対しては重イオン加速器を使って，$\beta \gtrsim 10^{-3}$ まで検出能力があることが実証されている[21]．

実際の使用にあたっては，大面積の CR 39 の板を地下の宇宙線バックグラウンドの小さいところに長時間据え置きしたのち，化学的処方でエッチングを行うと，軌跡に沿って円錐状に穴があけられる．軌跡方向 V_L と軌跡に直角な方向 V_T でエッチング速度が違い，円錐の頂角 $\tan^{-1}(V_T/V_L)$ はエネルギー損失量の増加関数である．板の両側からのエッチング孔が貫通すれば，孔のスキャンは容易に行える．東京グループは 2000 m^2 の CR 39 を大谷石採石場の洞窟に 2 年間据え置いて，モノポール探索を行った．結果は否定的であったが，パーカー極限を超えるフラックス上限が得られた[21]（図 7.4)．

イオン化損失を使う方法で現役最大の検出器は，イタリアのグランサッソに設置された MACRO である．MACRO は $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ を使う上記三つの方法を組み合わせた検出器で，現在ほぼパーカー制限に達する上限を与えており[22]，データが蓄積されれば，さらに 1 桁くらいは改良されると見込まれる．

エッチングを使った興味ある使用法として，雲母に残された軌跡を調べた実験がある．雲母はエッチング法軌跡検出器としては感度が高い方ではないが，$\beta \sim 10^{-3}$ 付近のモノポールは大きな磁気能率をもつ原子核（$^{27}\mathrm{Al}$ など）を捕獲して，十分検出可能な軌跡を残すことができる．地中にあって 5〜9 億年近い記憶を残す雲母を抽出して調べた結果では，モノポールの痕跡は見つからな

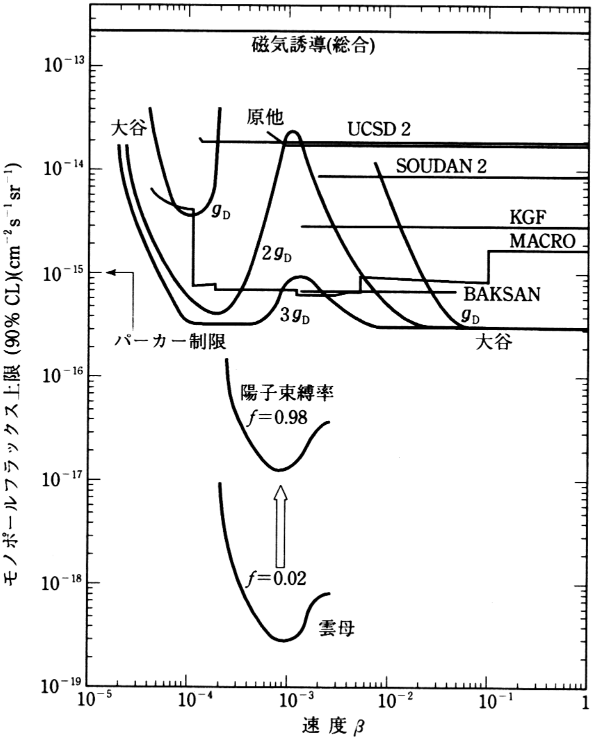


図 7.4 磁気単極子のフラックス上限値

大谷は CR 39 使用，磁荷 $g_D, 2g_D, 3g_D$ について求めてある[21]．他はすべて g_D を仮定．

磁気誘導[18]，大谷[21]，MACRO[22]，雲母[23]，原ら[24]，UCSD2[25]，SOUDAN2[26]，KGF[27]，BAKSAN[28]

雲母の陽子束縛率とはモノポールが地表に到達したときにすでに陽子と束縛状態になっている確率．

かった[23]．雲母測定は特定の β 範囲で最も厳しい制限を与えるが (図 7.4)，探索の前提条件にいくつかの不定性がある．例えばモノポールが地球に降ってきたときすでに陽子を捕獲していると，地殻では Al を捕獲しないのでフラックス上限が大きく変わる．図では捕獲率 f をパラメターとしている．またモノポールにより生じる放射線損傷の回復時間の不定性も解決すべき問題として残っている．さらに，モノポールに触媒作用があれば雲母に軌跡を残すほど長時間束縛状態は維持できないからこの方法は無効となる．

c.　触媒効果検出法

モノポールに触媒作用があれば，物質と反応して核子崩壊を誘起することはすでに述べた．捕獲断面積 $\sigma_c=\sigma_0/\beta$ とし，$\sigma^0=1\text{mb}(10^{-27}\text{cm}^2)$ であれば，$\beta=1(10^{-3})$ のとき，水の中を 10 m 動く間に平均 0.6（600）回の反応を起こすが，酸素原子核との断面積が非常に小さければ反応率は 1/9 になる．いずれにせよ，陽子崩壊検出器はモノポールの有力な検出器でもある．神岡[29] や IMB[30] の巨大水チェレンコフ検出器で陽子崩壊が 1 例も見つかっていないという事実から，モノポールフラックスの上限が直ちに求められる．図 7.5 上半部に σ_c をパラメターとして 1～100 mb に設定した場合と，$\sigma_c=\sigma_0/\beta^2$，$\sigma_0=10^{-4}$ mb と設定した場合について神岡のデータを図示した．

モノポール触媒作用の興味ある応用として，太陽からのニュートリノフラックスを測ることが示唆された[31]．太陽が誕生以来 45 億年にわたりモノポールを捕獲し，中心部に貯蔵してきたとすれば，中心部のモノポール反応

$$M+p\longrightarrow M+e(\mu)+\text{メソン}$$

$$\text{メソン}\longrightarrow \pi^+ + X$$

$$\pi^+\longrightarrow \mu^+\nu_\mu,\qquad \mu^+\longrightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$$

により，平均エネルギー 35 MeV のニュートリノを放出する．したがって電子ニュートリノ（ν_e）を検出してやれば，太陽の中心に存在するモノポールの数 N_M が推定できる．太陽中心でのモノポールによる電子ニュートリノ生成率を f とし，地球に到達するフラックスを I_ν とすると

$$f=N_M\sigma_c v_{rel}\rho_H N_A=4\pi d^2 I_\nu/R_\pi(1-A_\pi) \tag{7.47}$$

で与えられる．$v_{rel}=1.7\times10^{-3}\,c$, ρ_H（$=55\text{ g/cm}^3$）は陽子密度，N_A はアボガドロ数，d は太陽地球間の距離，R_π（$=0.57$; $SU(5)$ モデル）は陽子崩壊での π メソン生成分岐比，A_π（$=0.2$）は太陽中心での π の吸収確率である．ヘリウムとの反応は無視できる．神岡グループはニュートリノフラックスの観測上限値からモノポール数上限として

$$N_M<7\times10^{25}\left(\frac{1\ mb}{\sigma_c}\right)\qquad 90\%\text{CL} \tag{7.48}$$

を得た[29]．N_M をフラックスに換算する式は，式（7.40）で与えられている．$R=R_\odot=6.96\times10^8$ m，$\beta_{esc}=2\times10^{-3}$，$\tau=4.5\times10^9$ 年，$\sigma_c=\sigma_0/\beta^2$（式（7.34）

参照）と置き換えて

$$F<1.6\times10^{-21}(\beta/10^{-3})^2(1\mathrm{mb}/\sigma_0)\mathrm{cm^{-2}sr^{-1}s^{-1}} \tag{7.49}$$

となる．ただし，モノポールの質量が10^{17} GeVより大きいと，太陽に捕獲される確率が小さくなるので値は悪くなる．これはパーカー極限をはるかに超え，中性子星内の触媒効果から推定される値（式（7.42））と同程度である（図7.5下半分）．現在100倍近く大きい体積をもつスーパーカミオカンデが稼働中であるから，この上限値はさらに改良されると期待される．

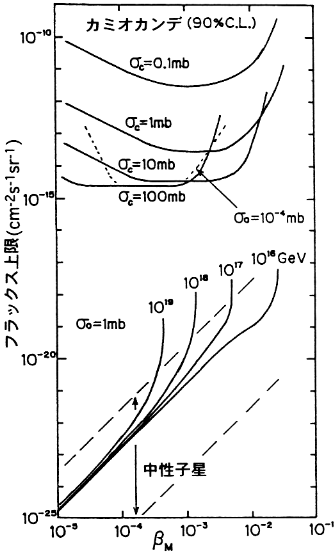


図7.5　カミオカンデ検出器による磁気単極子探索データ[29]
核子崩壊触媒作用から求めた磁気単極子フラックス極限値．上方曲線は検出器で核子崩壊が見つからなかったことからくる上限．$\sigma_c=0.1\sim100$ mbと設定した場合（実線）と，$\sigma_c=\sigma_0/\beta^2$，$\sigma_0=10^{-4}$ mbと設定した場合（ダッシュ線）について与えてある．下方の右上り曲線は太陽ニュートリノフラックス測定によるもの．触媒反応断面積$\sigma_c=\sigma_0/\beta^2$，$\sigma_0=1$ mbとして，質量Mをパラメターとしている．中性子星とは中性子星の輝度より求められる上限の計算値（本文式（7.42）[15]参照）．

7.6　おわりに

ト・フーフト-ポリヤコフのモノポール予言以来，20年にわたる探索が続け

られているにもかかわらずモノポールはいまだ見つかったという証拠はない．最も信頼できる磁気誘導法によるフラックス上限は，$10^{-12}\ \mathrm{cm^2sr^{-1}s^{-1}}$ 程度である．$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ を使う方法はこれより厳しい制限を与え，パーカー制限 $\sim 10^{-15}\ \mathrm{cm^2sr^{-1}s^{-1}}$ を超えるフラックス制限を与える．触媒作用を仮定すればもっと厳しい制限が可能であるが不定性が大きい．このように実験的には存在する証拠は見つからないということは，インフレーションモデル（後述第8章）が正しいことを強く示唆する．

参 考 文 献

1) 理論的なレビューとして，J. Preskill : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **34** (1984) 461-530
2) 実験的なレビューとして，D. E. Groom : *Phys. Reports*, **C140** (1986) 323
3) L. H. Ryder : Quantum Field Theory, 2nd ed. Cambridge University Press, 1996
K. Huang : Quarks, Leptons and Gauge Fields, 2nd. ed., World Scientific, Singapore, Chapter 5
4) G. t'Hooft : *Np*, **B79** (1974) 276
A. M. Polyakov : *JETP Lett.*, **20** (1974) 194 ; *Soviet Physics JETP*, **41** (1976) 988
5) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.*, **A133** (1931) 60
6) T. T. Wu and C. N. Yang : *Nucl. Phys.*, **B107** (1976) 365
7) E. Bogomol'nyi : *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24** (1976) 449
S. Coleman *et al.* : *Phys. Rev.*, **D15** (1977) 544
M. Prasad and C. Sommerfeld : *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 760
8) T. W. Kirkman and C. K. Zachos : *Phys. Rev.*, **D24** (1981) 999
9) J. Arafune, P. G. Freund and C. J. Goebel : *J. Math. Phys.*, **16** (1975) 433
10) V. Rubakov : *JETP Lett.*, **33** (1981) 644 ; *Nucl. Phys.*, **B203** (1982) 311
C. G. Callan : *Phys. Rev.*, **D25** (1982) 2141 ; *Phys. Rev.*, **D26** (1982) 2058
W. P. Trowers : *Acta Phys. Austr. Suppl.*, **25** (1983) 101
11) J. Arafune and M. Fukugita : *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 1901
J. Ellis, D. V. Nanopoulos and K. Olive : *Phys. Lett.*, **B116** (1982) 127
12) R. Jackiew and C. Rebbi : *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976) 1116
P. Hasenfratz and G. t'Hooft : *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976) 1119
13) M. S. Turner, E. N. Parker and T. J. Bogden : *Phys. Rev.*, **D26** (1982) 114
14) Y. Rephaeli and M. S. Turner : *Phys. Lett.*, **B121** (1983) 115
15) E. W. Kolb and M. S. Turner : *Ap. J.*, **286** (1984) 702
16) H. J/Frisch : Proc. NATO Advanced Research Workshop on Menopole (Monopole' 83) at Ann Arbor, ed. J. L. Stone, Plenum Publishing Corp., NY, 1984, p. 515
17) B. Cabrera : *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 1378
18) S. Bermob *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 839

19) S. P. Ahlen and K. Kinoshita : *Phys. Rev.*, **D26** (1982) 2347
D. M. Ritson : SLAC-Pub-2950 (1982), 文献 15 に引用
20) S. D. Drell *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 644
N. M. Kroll and V. Ganapathi : Inst. Phys. conf. ser. No. 71, paper presented at RIS 1984, Knoxville, Tenn., 16020 April 1984
V. Patera : *Phys. Lett.*, **A137** (1989) 259
21) S. Orito *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 1951
22) MACRO : S. Ahlen *et al.* : *Nucl. Instr. Methods*, **A324** (1993) 337
S. Ahlen *et al.* : *Astrop. Phys.*, **1** (1992) 11-25 ; *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994) 608
M. Ambrosio *et al.* : *Astrop. Phys.*, **4** (1995) 33 ; *ibid.*, **6** (1997) 113 ; *Phys. Lett.*, **B406** (1997) 249
23) P. B. Price, Shi-lun Guo, S. P. Ahlen and R. L. Fleisher : *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1265
P. B. Price and M. H. Salamon : *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 1226
D. Ghosh and S. Chatterjea : *Europhys. Lett.*, **12** (1990) 25
24) T. Hara *et al.* : 21st ICRC, Adlaide (1990), p. 79
25) UCSD2 : K. N. Buckland *et al.* : *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 2726
26) SOUDAN2 : J. L. Thron *et al.* : *Phys. Rev.*, **D46** (1992) 4846
27) KGF : H. Adarkar *et al.* : 21st ICRC (1990), p. 95
28) BAKSAN : E. N. Alexeyev *et al.* : *Nuovo Cimento Lett*, **35** (1982) 413, 21st ICRC (1990), Adlaide, p. 83
29) KAMIOKANDE : T. Kajita *et al.* : *J. Phys. Soc. Japan*, **54** (1985) 4065
30) S. Errede *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 245
31) J. Arafune and M. Fukugita : *Phys. Lett.*, **B133** (1983) 380

8

宇　宙　論[1,2)]

8.1 フリードマン方程式

a. 宇宙原理

宇宙における物質（星，銀河）の分布は，空間的に一様かつ等方的であるという仮定*1) を宇宙原理という．宇宙論の最も基本的な仮定の一つである．この仮定をおくと，宇宙の計量は次式で表される（ロバートソン-ウォーカーの計算）．

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{8.1}$$

(r, θ, ϕ) は無次元で共動座標と呼ばれる．k は R, r を適当に規格化すれば，$+1, 0, -1$ の値をとり，それぞれ閉じた宇宙，平坦な宇宙，開いた宇宙と呼ばれる（付録 B.1 参照）．$R(t)$ は長さの次元をもち時間とともに変化する量で，宇宙のスケールを表す．共動座標系で計算した距離 l は時間によらないが，実際の距離はこれに $R(t)$ を掛けた $R(t)l$ で表され，時間の関数である．閉じた宇宙では R は宇宙の半径と見なせる．閉じた宇宙では曲率が正，R は現在は増加しつつあるが，最高値に達した後減衰しやがては 0 になる．平坦な宇宙では R は増加し続けるが，$t \to \infty$ で $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = 0$ となる．開いた宇宙では曲率が負で，R は際限なく増加し続ける．この計量を使ってアインシュタインの方程式を書き下ろすとフリードマン方程式を得る．

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{8.2}$$

*1) 非常に大きなスケール（>100 Mpc）では観測的にも真実である．

$H(t)$ はハッブル定数と呼ばれるが，実際は時間の関数で宇宙の膨張率を表す．G は万有引力定数で，ρ は宇宙のエネルギー密度である．Λ は宇宙項と呼ばれる量で，インフレーションを問題にするときや最新の宇宙論で重要な役割を果たすこともあるが，簡単のためここでは $\Lambda=0$ として話を進める．$k=0$ にする密度を臨界密度といい，現時点 $(t=t_0)$ での臨界密度 ρ_c は，現時点でのハッブル定数の値を入れて[3,4]，

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=1.88\times10^{-29}h^2\,\mathrm{gr/cm^3}\sim10.5h^2\,\mathrm{keV/cm^3} \tag{8.3 a}$$

$$=2.78\times10^{11}h^2M_\odot(\mathrm{Mpc})^{-3}$$

$$H_0\equiv H(t_0)=100h\,\mathrm{km/sec/Mpc} \tag{8.3 b}$$

$$1\,\mathrm{Mpc}=10^6\,\mathrm{parsec},\qquad 1\,\mathrm{parsec}=3.26\,\text{光年} \tag{8.3 c}$$

$$M_\odot=1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}\ (\text{太陽質量}) \tag{8.3 d}$$

h は観測量の不定さを表し，0.6～0.8 である．なお，$\Omega=\rho/\rho_c$ なるパラメターがエネルギー密度とともによく使われる．$\Omega=1$ が平坦宇宙，$\Omega<1$ が開いた宇宙である．式 (8.2) は $\Lambda=0$ であれば，半径 R の球の中に含まれる質量 M $(=4\pi\rho R^3/3)$ によるニュートンの方程式

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2-G\frac{M}{R}=E \tag{8.4}$$

に形の上では一致することに注意しよう．覚えておくと便利である．

宇宙論で重要なもう一つの式は，エネルギー保存の式である．圧力を P として

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3)+P\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.5}$$

で与えられる．

b. 光の赤方偏移

$$\mathrm{d}\eta(t)=\frac{\mathrm{d}t}{R(t)},\qquad l(r)=\int_0^r\frac{\mathrm{d}r}{[1-kr^2]^{1/2}} \tag{8.6 a}$$

を定義する．光の行路は $\mathrm{d}s^2=0$ で与えられるから

$$\eta(t_0)-\eta(t)=l(r) \tag{8.6 b}$$

共動座標 $r=r_1$ から時刻 $t_1\sim t_1+\delta t_1$ に放出された光を，$r=0$ で，時刻 $t_0\sim t_0+\delta t_0$ に受け取ったとすれば，(8.6 b) の右辺は時刻によらないから，$\delta\eta(t_0)=$

$\delta\eta(t_1)$ が成立する．ゆえに，

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)}=\frac{\delta t_1}{R(t_1)} \tag{8.7}$$

光の波長と振動数を λ と ν と書き，δt として $1/\nu$ をとれば，

$$\nu_1 R(t_1)=\nu_0 R(t_0)\equiv\nu_0 R_0$$

$$\therefore\quad \frac{\nu_1}{\nu_0}=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}=1+z=\frac{R_0}{R(t_1)} \tag{8.8}$$

すなわち遠方にある銀河から放出される光は常に赤方に ($\lambda_0>\lambda_1$) に偏移する．

c．粒子の統計と分布

宇宙の時間変化は，上記の 2 式 (8.2)，(8.5) に状態方程式が与えられればほぼ記述可能である．そのため，熱力学における状態変数をいくつか計算しておく．粒子 i が熱平衡状態にあるときの，数密度 n_i およびエネルギー密度 ρ_i は，粒子のもつ自由度を g_i (フォトンや通常のフェルミオンは $g=2$) として

$$dn=\frac{g}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{\exp[(E-\mu)/T]\pm 1} \tag{8.9}$$

$$n_i=\int dn_i=g_i\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3\times\begin{cases}1 & \text{：ボース-アインシュタイン (BE) 統計}\\ 3/4 & \text{：フェルミ-ディラック (FD) 統計}\\ \zeta(3)^{-1} & \text{：マクスウェル-ボルツマン (MB) 統計}\end{cases} \tag{8.10 a}$$

$$=g_i\left[\frac{mT}{2\pi}\right]^{3/2}e^{(\mu_i-m)/T}\ \text{：非相対論粒子} \tag{8.10 b}$$

$$\rho_i=\int E_i dn_i=g_i\frac{\pi^2}{30}T^4\times\begin{cases}1 & \text{：BE}\\ 7/8 & \text{：FD}\\ 90/\pi^4 & \text{：MB}\end{cases} \tag{8.11 a}$$

$$=n_i m+(3/2)n_i T\ \text{：非相対論非縮退粒子}$$

$$\zeta(3)=1.202,\qquad E=[p^2+m^2]^{1/2} \tag{8.11 b}$$

温度 T はエネルギーで表すものとする．温度で表すときはボルツマン定数 k_B を掛けてエネルギーに換算する．μ は化学ポテンシャルであり，フォトンの場合は 0 である．粒子と反粒子の化学ポテンシャルが違うと，粒子数と反粒子数に差がでるが，宇宙の粒子数の非対称度は小さいので $\mu\fallingdotseq 0$ としてよい (後述 §8.5.2)．現在の宇宙背景輻射温度は，$T_{\gamma 0}=2.728\pm0.002$°K と測定されてい

る[5]．宇宙のフォトン数は背景輻射のフォトンの寄与が圧到的に大きいから，現在の宇宙の全フォトン数密度は，$n_\gamma \fallingdotseq 400/\mathrm{cm}^3$ と計算できる．圧力 P は，単位時間あたり単位面積を通過する運動量の面に垂直な成分であるから

$$P=\int p\cos\theta v\cos\theta dn=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}p\mathrm{d}n \qquad (8.12\,\mathrm{a})$$

となり，

$$P=(1/3)\rho：\text{相対論的粒子} \qquad (8.12\,\mathrm{b})$$

$$=n_iT\quad：\text{非相対論非縮退粒子} \qquad (8.12\,\mathrm{c})$$

で与えられる．エントロピー（密度）$S(s)$ は，

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}Q/T \qquad (8.13\,\mathrm{a})$$

$$s=S/V=(\rho-\mu n+P)/T \qquad (8.13\,\mathrm{b})$$

で与えられる．μ は化学ポテンシャルであるが，先に述べたように宇宙論では $\mu=0$ としてよい近似である．ただし，元素合成やフォトン再結合時の計算など特別に問題とするときもある．相対論的粒子が熱平衡状態にある時のエントロピー密度とエネルギー密度は

$$s=(\rho+P)/T=(4/3)\rho_\gamma/T=\frac{2\pi^2}{45}g_{*s}T^3 \qquad (8.14\,\mathrm{a})$$

$$\rho_r=g_*\frac{\pi^2}{30}T^4 \qquad (8.14\,\mathrm{b})$$

$$g_{*s}=g_*=\sum g_b+(7/8)\sum g_f \qquad T\gg m_e \qquad (8.15\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}g_{*s}&=2+\frac{7}{8}\times3\times2\times\left(\frac{4}{11}\right)^{3/3}=3.91\\ g_*&=2+\frac{7}{8}\times3\times2\times\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}=3.36\end{aligned}\right\} \qquad T\ll m_e \qquad (8.15\,\mathrm{b})$$

g_{*s}, g_* は温度 T における g の実効値で，熱平衡にあるすべての相対論的粒子（$m_i\ll T$）の自由度を考慮したものである．温度とともに変わる量であり，標準理論（$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$）における概略を図 8.1 に示す．$T\gg m_e$ では，$g_{*s}=g_*$ であるが，$T\ll m_e$（すなわち現在）では $T_\nu=(4/11)T_\gamma$ であるので補正因子が入り，$g_{*s}>g_*$ となる．(8.15 b) の値は 3 種のニュートリノがあるとしたときの値である．

共動体積内の全エントロピー

$$S \sim sR^3 \sim (TR)^3 \sim \text{const.} \tag{8.16}$$

は不変に保たれる．エントロピー密度は，(8.10 a)，(8.14) を見れば，相対論的粒子の数に比例する量であることがわかる．現在のエントロピー密度 s_0 は，ほぼ背景輻射のフォトンとニュートリノの数で決まり，$s_0 \sim 7n_\gamma \sim 2.8 \times 10^3/\text{cm}^3$ である．

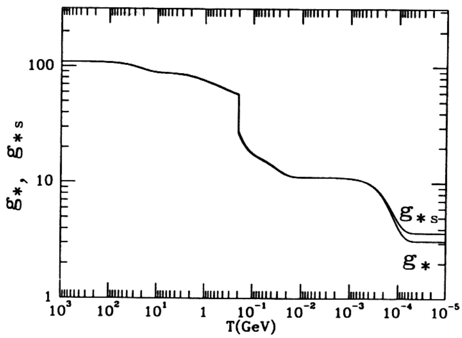


図 8.1 標準理論 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ における実効的粒子の自由度 g_* と g_{*s} を温度 T の関数として表したもの．

8.2 ビッグバン宇宙論

宇宙は過去のある時期，高温高密度の状態から始まったとする．そこでは，非常に高温のためあらゆる種類の粒子と反粒子が熱平衡状態にあり，すべての粒子数は同程度にあった．宇宙はフリードマンの運動方程式 (8.2) に従い，H^{-1} で決まる時定数で膨張する．ここで，よく誤解されるので注意しておくが，宇宙は誕生してから何もない無の空間に向けて膨張していくのではなく，空間そのものが膨張するのである．膨張に伴い宇宙温度が下がるとともに各種の相転移を起こす．また粒子のもつ質量と相互作用で決まるある時刻に熱平衡状態から切り離されていく (decouple)．熱平衡に関与する反応率 Γ は n (粒子数密度)，v (温度により決まる平均速度)，σ (反応の断面積) によって，

$$\Gamma \fallingdotseq nv\sigma \tag{8.17}$$

と表されるから，切り離しの温度を T_{dc} とすると，

$$H(T_{dc}) \fallingdotseq \Gamma \tag{8.18}$$

が成り立つ．

現在想像しうる限りの最高温度は，プランク温度$=G^{-1/2}\sim 1.22\times 10^{19}$ GeV である．温度 T が $\sim 10^{15}$ GeV の頃大統一による相転移が起こり，強い相互作用と電弱相互作用の分離が起こる．$T\sim G_F{}^{-1/2}=250$ GeV で電弱相互作用の分離，$T\sim \Lambda_{QCD}\sim 200$ MeV でクォークの閉じ込め相が生じる．$T\sim 1$ MeV でニュートリノの切り離しが起き，$T\sim 0.1$ MeV で重水素の光分解が止まり水素ヘリウムなどの軽い元素合成が進む．$T\sim 0.3$ eV で，フォトンは原子をプラズマ状態に保持できなくなり，陽子と電子は結合して原子をつくる(recombination＝再結合ともいう)．この結果物質はフォトンに対し透明となるのでこれを宇宙の晴れ上がりという．このとき切り離されたフォトンが，現在の $T=2.7$ 度の背景輻射として残っている．標準ビッグバン宇宙論の観測証拠もしくは成果をいくつか列挙する[1,2]．

(1) 宇宙はいろいろなレベルで構造はもつものの，大きなスケール（>100 Mpc）で見れば銀河や電波源は一様かつ等方的に分布している．

(2) 遠方にある銀河ほど光スペクトルが大きな赤方偏移 $z=(\lambda_0-\lambda)/\lambda$ を示す．

(3) 宇宙の背景輻射が存在する．

(4) 宇宙の $H/H_e/D/L_i$ の元素組成比を正しく再現する．

宇宙原理 (1) と膨張宇宙 (2) はフリードマン方程式の根拠であり，(3), (4) はビッグバン宇宙論を支持する証拠である．

a． 輻射優勢と物質優勢

宇宙エネルギー密度 ρ への寄与がもっぱら相対論的粒子のとき（宇宙初期）輻射優勢といい，非相対論的粒子の場合（現在）を物質優勢という．輻射優勢のときは $P=\rho/3$, 物質優勢のときは $P\ll\rho\fallingdotseq mn$ であるので，(8.5), (8.11) より直ちに

$$\rho(t)\begin{cases}\sim \dfrac{1}{R^4(t)}\sim T^4 & \text{輻射優勢} \quad (8.19\,\mathrm{a})\\[2ex] \sim \dfrac{1}{R^3(t)}\sim T^3 & \text{物質優勢} \quad (8.19\,\mathrm{b})\end{cases}$$

(8.2) 式右辺の k, Λ の項は (8.19) を考慮すれば宇宙初期では小さく無視できる．その場合 (8.2), (8.19) から容易に，

$$R(t) \sim T^{-1} \sim \begin{cases} \sim t^{1/2} & \text{輻射優勢} \quad (8.20\,\mathrm{a}) \\ \sim t^{2/3} & \text{物質優勢} \quad (8.20\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \begin{cases} (2t)^{-1} & \text{輻射優勢} \quad (8.21\,\mathrm{a}) \\ (3t/2)^{-1} & \text{物質優勢} \quad (8.21\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

が導ける．H^{-1} をハッブル時間という．

b. 地　平　線

観測者に影響を及ぼすことのできる（因果関係にある）事象位置の最大半径値を地平線 (particle horizon) という．これは r 方向に伝播する光の到達距離として得られる．実際の距離は共動座標での距離にスケール因子 R を掛けて得られるから，計量および光の径路 ($\mathrm{d}s^2=0$) を考慮すると，

$$d_H(t) = R(t)\int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t)\int_0^t \frac{c\,\mathrm{d}t'}{R(t')} = \begin{cases} 2ct = cH^{-1} & \text{輻射優勢} \\ 3c(t-t_{eq}) + 2ct_{eq} & \text{物質優勢} \end{cases} \quad (8.22)$$

ただし，t_{eq} は輻射優勢から物質優勢に変わる時刻である．

c. 輻射優勢の時代

われわれに興味あるのはもっぱら輻射優勢の時代である．後の計算に必要な諸量をいくつか計算しておく．宇宙のエネルギー密度 ρ_r は (8.11) を使えば，

$$\rho_r = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad (8.23\,\mathrm{a})$$

第 2 式は (8.2) に (8.20) を入れれば導ける．g_* が定数と見なせる温度領域では

$$T = \left[\frac{90}{g_* 32\pi^3 G}\right]^{1/4} t^{-1/2} \fallingdotseq \frac{1.33\times10^{10}(\mathrm{K})}{(t/\text{秒})^{1/2}} = \frac{1.15\ \mathrm{MeV}}{t^{1/2}\ \text{秒}} \quad (8.24)$$

また，(8.2), (8.23) を使えば，

$$H(t) = \alpha T^2 \quad (8.25\,\mathrm{a})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_* G} \fallingdotseq \frac{1.66 g_*{}^{1/2}}{M_{Pl}} \quad (8.25\,\mathrm{b})$$

$M_{Pl} = G^{-1/2} = 1.22\times10^{19}\ \mathrm{GeV}$ はプランク質量である．

d. 宇宙年齢とバリオン密度

現在は $\Lambda=0$, $k=0$ ならば物質優勢の時代である．現在の宇宙を特徴づける数をいくつかあげておく．宇宙年齢の大部分は物質優勢の時代であるから，現在の宇宙年齢を t_0 とすれば，$k=0$ のとき (8.2) はすぐ解けて

$$t_0=(2/3)H(t_0)^{-1}\sim 6.5\times 10^9 h^{-1}\,\text{年}\sim 3\times 10^{17}\,\text{秒} \tag{8.26}$$

が導ける．

典型的な星には大体 $\sim 10^{57}$ 個の核子があり，1個の銀河には $\sim 10^{11}$ 個の星があり，そして宇宙には $\sim 10^{11}$ 個の銀河がある．したがって，バリオン数の総数は $\sim 10^{79}$ である．今日観測可能な宇宙のサイズは $\sim 10^{28}$ cm $(=ct_0)\sim 3000$ Mpc であるので，バリオン数密度 n_B は $\sim 10^{-6}/\text{cm}^3$ となる．フォトン数 n_γ $\sim 400/\text{cm}^3$ であるから，バリオン数対フォトン数比は

$$\eta_B\equiv n_B/n_\gamma\sim 10^{-9} \tag{8.27 a}$$

となる．標準ビッグバン宇宙論を使えばより詳しい値が得られる（後述§8.5）

$$\eta_B=2.75\times 10^{-8}\Omega_B h^2 \tag{8.27 b}$$

$$\Omega_B h^2=0.02\pm 0.004 \tag{8.27 c}$$

Ω_B はバリオンの宇宙全体に占めるエネルギー密度比である．

e. 輻射優勢 → 物質優勢転換時期

物質エネルギー密度と輻射エネルギー密度がほぼ拮抗する時間 t_{eq} を計算しよう．物質/輻射のエネルギー密度 (ρ_m/ρ_r) と R はそれぞれ

$$\rho_m(t_0)R^3(t_0)=\rho_m(t_{eq})R^3(t_{eq}) \tag{8.28 a}$$

$$\rho_r(t_0)R^4(t_0)=\rho_r(t_{eq})R^4(t_{eq}) \tag{8.28 b}$$

の関係を満たすから，$\rho_m(t_{eq})=\rho_r(t_{eq})$ とすれば，

$$z_{eq}+1=\frac{R_0}{R(t_{eq})}=\frac{\rho_m(t_0)}{\rho_r(t_0)}\simeq\frac{\rho_c\Omega_0}{g_{*0}\pi^2 T_0^4/30}\simeq\frac{1.88\times 10^{-29}\Omega_0 h^2\,\text{gr/cm}^3}{8.09\times 10^{-34}\,\text{gr/cm}^3}$$
$$=2.32\times 10^4\,\Omega_0 h^2 \tag{8.29 a}$$

T_0 は現時点の宇宙背景輻射温度であり，g_{*0} の値は (8.15 b) で与えられている．輻射と物質エネルギーが同等になるこの時期の温度は，

$$T_{eq}=T_0(1+z_{eq})\sim 5.50\,\Omega_0 h^2\,\text{eV}\sim 10\,\text{eV}$$

$$t_{eq}\sim\frac{2}{3}\frac{(1+z_{eq})^{-3/2}}{H_0\Omega_0^{1/2}}=5.7\times 10^{10}(\Omega_0 h^2)^{-2}\,\text{秒} \tag{8.29 b}$$

に相当し，輻射が切り離されて宇宙が晴れ上がるとき（付録 B.2）

$$z_{dc} \simeq 1100$$

$$T_{dc} \sim 3030\,\mathrm{K} \sim 0.26\,\mathrm{eV}$$

$$t_{dc} = 5.64 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2}\,\text{秒} \sim 300{,}000\,\text{年} \tag{8.29 c}$$

の少し前である．

8.3 インフレーション

8.3.1 宇宙の急速膨張

ビッグバン宇宙論は今日観測される宇宙の状態を再現するのに非常に成功をおさめたが，概念的な困難をいくつか抱えていた．主なものを四つあげる．

(1) 地平線問題 (2) 平坦性問題 (3) モノポール問題 (4) 宇宙項問題

であり，(1)～(3) の解決策として考案されたのがインフレーション宇宙論である．インフレーションとは，宇宙初期のある時期に宇宙が急速に膨張することをいう．これは真空がエネルギー密度 ρ_v=const. をもっていたとすると可能である．(8.2) を見れば，これは宇宙項に相当する．輻射優勢時代のエネルギー密度は，

$$\rho(T) = \rho_v + \rho_r = \rho_v + \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \tag{8.30}$$

いま，$\rho_v \gg \rho_r$ としよう．そうすると式 (8.2) は，

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_v}{3}} = \mathrm{const.} \equiv H_{\mathrm{inf}} \tag{8.31 a}$$

であり，

$$R(t) = R(t_i) e^{H_{\mathrm{inf}}(t - t_i)} \tag{8.31 b}$$

t_i はインフレーションの始まる時刻である．すなわち，宇宙は指数関数的に膨張する．

ρ_v は，大統一場が自発的に対称性を破るときに生じる．対称性を破る相転移温度を T_c とすると，$T \gg T_c$ では，対称性が破れておらず大統一ヒッグスポテンシャル $V(\phi)$ の最小値は $\phi=0$ にある．$T \ll T_c$ で真空は $\phi=\sigma$ に落ちつく（図8.2)．$\phi=0$ は偽の真空となり，真の真空に向けて移動を開始するが，

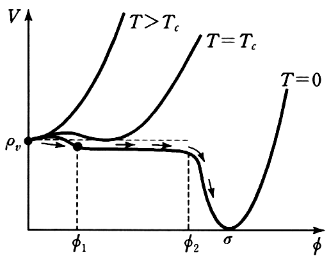


図 8.2 インフレーションモデル
(slow rollover model)

$\phi=0\sim\phi_1$ では 1 次相転移で偽真空の中に真の真空の泡が発生する．$\phi=\phi_1\sim\phi_2$ ではゆっくりと滑り落ちる（インフレーション期）．$\phi>\phi_2$ では急速に σ に到達した後，σ のまわりの減衰振動（ヒッグスの生成と崩壊）で再加熱し最終的には σ に落ちつく．

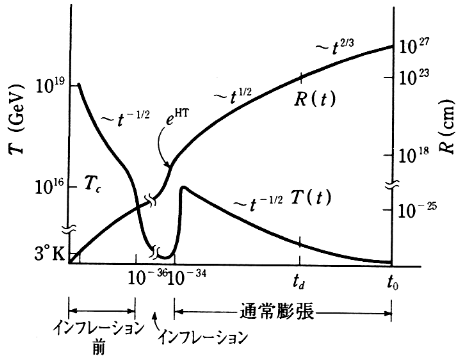


図 8.3 インフレーションシナリオでの温度 T と宇宙サイズ R の時間変化

$t\lesssim10^{-36}$ 秒はインフレーション前期で $R\sim T^{-1}\sim t^{1/2}$，$10^{-36}\lesssim t\lesssim10^{-34}$ 秒はインフレーション期で，$R\sim T^{-1}\sim e^{Ht}$．この期間に宇宙は，$e^{100}\sim10^{43}$ 倍となる．インフレーション終了後再加熱があり，再び $R\sim t^{1/2}$ となり，$t=t_{eq}\fallingdotseq t_{dc}\sim10^{10}$ 秒で物質優勢の世界となり，$R\sim T^{-1}\sim t^{2/3}$ で進行する（スケールは任意）．

$\phi\sim0$ にあるときは，真の真空 $\phi=\sigma$ に比べて ρ_v だけのエネルギーをもつ．ϕ の宇宙膨張を取り入れた運動方程式は ϕ の作用 $\int d^3x\mathcal{L}_\phi\to\int d^3xR^3(t)\mathcal{L}_\phi$ として得られる．

$$\ddot{\phi}+(3H(t)+\Gamma_\phi)\dot{\phi}+\frac{\partial V}{\partial\phi}=0 \tag{8.32}$$

Γ_ϕ は，ϕ と他の粒子の相互作用（ϕ が粒子対に転換する）を取り入れることにより生じる減衰因子である．これは減衰振動の方程式であるから，図 8.2 のポテンシャルの形を仮定すれば*2)，次のような定性的な議論ができる．

(a) slow rolling（摩擦力が大きく，第1項 $\fallingdotseq0$）：宇宙の膨張が実質的な摩擦力を提供し，ϕ はこのほぼ平らなポテンシャルの坂を摩擦力によりゆっくり

*2) このような特別の形をしたヒッグスポテンシャルは，大統一ゲージ場が自発的に対称性を破るときに求められる（素粒子論の立場からの）性質と必ずしも整合しない．この場合，大統一群の一重項に属し通常の粒子とは弱くしか相互作用しない特殊なヒッグス場がインフレーションを引き起こすと考える．

と滑り落ちる．ϕ の粒子との相互作用はまだ働いていない*3)．$\phi=\phi_1$ と ϕ_2 の間でポテンシャルの傾斜が緩く長ければ，ϕ が ϕ_2 に向けて滑る時間 τ も長いであろう（$\tau \gg H^{-1}$：slow rolling）．なお，$\phi=0 \to \phi_1$ への小さなポテンシャル障壁は，もし存在すれば，トンネル効果による遷移で潜熱を出す（1 次相転移）が，ここの議論では無視する．最初に提案されたインフレーションモデルではこの形の 1 次相転移を主として想定した．

(b) 再加熱： ϕ_2 を過ぎると，ϕ は深い井戸ポテンシャルの底に急激に滑り落ちていき，$\phi=\sigma$ のまわりで振動を始める．この振動は膨張速度 H^{-1} に比べて十分速い（$\omega^2 \sim \partial^2 V/\partial\phi^2$, $\omega \gg H$）．振動開始は，質量 $m=\omega \sim 10^{15}$ GeV の高エネルギーヒッグス粒子の出現を意味し，急速に粒子反粒子対などへ崩壊する．すなわち，ここで $\Gamma_\phi \gg 3H$ となる．振動は減衰振動であるが減衰時間は膨張時間に比べるとはるかに短い．これらの粒子が熱化すると，指数的膨張により冷やされた宇宙は再び加熱され $T \sim 10^{15}$ GeV の大統一温度にもどり，その後は，バリオン非対称生成などを経て，標準宇宙論のシナリオに復帰する（図 8.3）．

σ を大統一エネルギー 10^{15} GeV にとると，$\rho_v \sim \sigma^4$ であるから，

$$H_{\rm inf}=\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\sigma^2}{M_{Pl}} \sim 10^{11}\,{\rm GeV} \sim 10^{36}\,{\rm sec}^{-1} \tag{8.33 a}$$

であり，$t_i \sim 10^{-36}$ sec にインフレーションが始まる．slow rolling の時間を，$\tau=100H^{-1}{}_{\rm inf} \sim 10^{-34}$ sec としよう．これは非常に短い時間のように見えるが，その間（$10^{-36} \to 10^{-34}$ sec）に，宇宙は

$$e^{H_{\rm inf}\tau} \sim e^{100} \sim 3\times10^{43} \tag{8.33 b}$$

倍に膨張するのである．

次に最初に述べた問題点とインフレーション宇宙による解決策を解説する．

8.3.2 地平線問題

議論を簡単にするために，地平線を $d_H(t)=ct$ で定義すれば，現時点 t_0 での地平線 $d_H(t_0)\equiv R_0=ct_0 \sim 10^{28}$ cm であり，観測可能な宇宙の最大値を与え

*3) この時点では，$V \fallingdotseq$ const. であるから ϕ のもつ質量（$m^2=\partial^2 V/\partial\phi^2$）は $\fallingdotseq 0$．ϕ のもつ空間依存性（フーリエ成分 $k \sim \lambda^{-1}$）は宇宙膨張により薄められ赤方移動してしまうので $k \fallingdotseq 0$．したがって ϕ は質量 $\fallingdotseq 0$，運動量 $\fallingdotseq 0$ のボーズ粒子の凝縮体として振る舞う．

る．現在の地平線は時刻 t においては，$d_{H0}(t)$ と表されるものとすれば，

$$d_{H0}(t)=\frac{R(t)}{R(t_0)}d_H(t_0)=\frac{R(t)}{R(t_0)}ct_0 \tag{8.34}$$

ゆえに，

$$\frac{d_{H0}(t)}{d_H(t)}=\frac{R(t)}{R(t_0)}\left(\frac{t_0}{t}\right) \tag{8.35}$$

背景輻射が切り離される時刻 t_{dc} は，物質と輻射エネルギーが等しくなる時刻 $(t_{eq}\sim 10^{10})$ にほとんど等しいから，(8.20) より

$$\frac{d_{H0}(t)}{d_H(t)}=\frac{R(t)}{R(t_{dc})}\frac{R(t_{dc})}{R(t_0)}\frac{t_0}{t}=\left(\frac{t}{t_{dc}}\right)^{1/2}\left(\frac{t_{dc}}{t_0}\right)^{2/3}\left(\frac{t_0}{t}\right)$$
$$=\left(\frac{t_0}{t_{dc}}\right)^{-1/6}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}\fallingdotseq 10^{-1}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} \tag{8.36}$$

したがって，輻射が切り離されたときの地平線 $d_H(t_d)$ は，

$$\frac{d_{H0}(t_d)}{d_H(t_d)}\fallingdotseq 100 \tag{8.37}$$

現在の宇宙背景輻射は，非常によい近似で，$T=2.728\pm 0.002$ の温度のプランク熱放射のスペクトル分布で表される．かつ全天どの方向で見ても温度ゆらぎが $\fallingdotseq 10^{-5}$ という非常に小さい範囲におさまっている．このことは，背景輻射が十分よくかき混ぜられた状態であること，すなわちすべてが地平線の中にあったことを意味する．一方，(8.37) によれば，現在観測可能な宇宙の大きさは過去にさかのぼれば，その時刻における地平線の 100 倍もあったこと，逆にいうと，切離し時における背景輻射の地平線は現時点で観測すれば，視角 ~1.8 度 (=180/100) の範囲にしか及ばないことを意味する．すなわち，全天にわたる背景輻射の一様性は説明できない．これが地平線問題である．

解決策： t_f をインフレーションが終了する時間とすると

$$\frac{d_{H0}(t)}{d_H(t)}=\frac{R(t)R(t_f)R(t_{dc})t_0}{R(t_f)R(t_{dc})R(t_0)t}=\frac{e^{H_{\inf}t}}{e^{H_{\inf}f}}\left(\frac{t_f}{t_{dc}}\right)^{1/2}\left(\frac{t_{dc}}{t_0}\right)^{2/3}\left(\frac{t_0}{t}\right)$$
$$\sim 10^{-1}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}\left(\frac{t_f}{t}\right)^{1/2}e^{H_{\inf}(t-t_f)} \tag{8.38}$$

t をインフレーションが始まる $t_i=10^{-36}$ sec とすると $t_f-t_i=\tau$ を入れて，

$$\frac{d_{H0}(t)}{d_H(t)}=10^{-1}\left(\frac{10^{17}}{10^{-36}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tau+t_i}{t_i}\right)^{1/2}e^{-100}=10^{-17}\ll 1 \tag{8.39}$$

となり，背景輻射切離し時の地平線は現在観測可能な全天よりはるかに大き

く，地平線問題は解決する．

8.3.3 平坦性問題

宇宙の物質密度は観測によれば，$\Omega_0=0.1\sim0.3$ であり非常に1に近く，フリードマン方程式 (8.2) の中で，曲率項 (k の掛かる項) は極度に優勢ということはない．このことは，相当に不自然な状態であることが次のようにしていえる．$\rho_c=3H^2/8\pi G$ を (8.2) に入れると，

$$\Omega-1=\frac{\rho-\rho_c}{\rho_c}=\frac{k}{R^2(t)}H^{-2}(t)=\frac{k}{\dot{R}^2} \tag{8.40}$$

(8.20) を使えば，

$$\dot{R}\sim\begin{cases}t^{-1/2}, & t<t_{eq}\\ t^{-1/3}, & t>t_{eq}\end{cases} \tag{8.41}$$

であるから，

$$\frac{\Omega(t)-1}{\Omega_0-1}=\frac{\dot{R}^2(t_0)\dot{R}^2(t_{eq})}{\dot{R}^2(t_{eq})\dot{R}^2(t)}=\left(\frac{t_{eq}}{t_0}\right)^{2/3}\left(\frac{t}{t_{eq}}\right) \tag{8.42}$$

これより，

$$\begin{aligned}&\Omega(t_{eq})-1=2\times10^{-5}(\Omega_0-1)\sim-10^{-5}\\ &\Omega(t_{\mathrm{GUT}})-1\fallingdotseq10^{-51}(\Omega_0-1)\fallingdotseq\begin{cases}-10^{-51} & \Omega_0=0.1\\ +10^{-51} & \Omega_0=2\end{cases}\\ &t_{\mathrm{GUT}}=M_{\mathrm{GUT}}{}^{-1}\sim10^{-35}\,\mathrm{sec}\end{aligned} \tag{8.43}$$

すなわち，時間をさかのぼれば Ω は限りなく1に近づく．仮に，プランクエネルギーの時刻 ($t\sim M_{Pl}{}^{-1}\sim10^{-44}$ sec) に，$|\Omega-1|$ が有限な値 $\sim O(1)$ をもっていたとすると，$k>0$ であれば，あっという間もなく ($\sim10^{-43}$ 秒) 宇宙は再収縮に転じていたであろうし，$k<0$ であれば，現在の宇宙温度3度に達するのに $\sim10^{-11}$ 秒もかからなかったであろう[2)]．このような微調整は不自然であり，Ω は正確に1であったか，何らかの理由で $\Omega\to1$ となったと考えざるをえない．これが平坦性問題である．

解決策：平坦問題は，(8.40) を書き換えると，

$$\Omega=\left[1-\frac{k/R^2}{8\pi G\rho/3}\right]^{-1} \tag{8.44}$$

となる．インフレーションがあると，$R^{-2}\sim\exp(-2H_{\mathrm{inf}}\tau)\to0$ であるので，Ω は限りなく1に近い値となって解決する．

8.3.4 モノポール問題

宇宙が高温で $T\sim10^{15}$ GeV の時期，大統一（GUT，たとえば $SU(5)$）が成立していれば，温度が下がると対称性が破れて $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ にわかれるが，このときに，ト・フーフト-ポリヤコフ（t'Hooft-Polyakov）のトポロジカルなモノポールが発生することが知られている[6]（第7章参照）．その質量は $\sim M_{\mathrm{GUT}}/\alpha_{\mathrm{GUT}}\sim10^{-8}$ gr で非常に大きい．何個くらい生成されるかはわからないが，生成時刻での地平線内で1個よりは多くつくられたであろう．とすると後は，標準的な宇宙膨張と熱平衡の理論から，モノポールの数密度の対エントロピー比は，$n_{MP}/s>10^{-10}$ となることがいえる[7]．一方，モノポールの宇宙エネルギー密度への寄与が，臨界値を超えないという条件から，$n_{MP}/s<10^{-23}$ という条件がつく．モノポールは非常に重いので，消滅させるうまいメカニズムが考えつかない．すなわち，モノポールは理論上は現在の宇宙に豊富に（バリオンと同じくらい）存在しなければならないにも関わらず見つかっていないのである．モノポール問題は，インフレーション時に数密度が十分に薄められることで解決する．

インフレーションを経過すると，宇宙の初期状態の違いは，ほとんどなくなってしまう．指数関数的膨張によって，宇宙の曲率と粒子密度はほぼ完璧に薄められてしまうのである．インフレーション開始時には $\sim10^{-25}$ cm であった宇宙サイズが，インフレーション終了後には $\sim10^{18}$ cm になる．一方，現在の観測宇宙のサイズ $ct_0\sim10^{27}$ cm は，大統一の時代には，

$$\frac{d_{H0}(t)}{ct_0}\fallingdotseq10^{-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{8.45 a}$$

と計算できる．$t=10^{-36}$ 秒を入れると

$$d_{H0}(t_{\mathrm{GUT}})\fallingdotseq10^{28}\ \mathrm{cm}\times10^{-1}(10^{-36}/10^{17})^{1/2}\fallingdotseq1\ \mathrm{cm} \tag{8.45 b}$$

となる．すなわち，観測宇宙は大統一の時代はたかだか ~1 cm くらいの大きさであり，われわれはインフレーションで肥大した真の宇宙のごく一部しか見ていないことになる．

8.3.5 宇 宙 項 問 題

現時点での宇宙のエネルギー密度は，たかだか臨界値 ρ_c の程度である．

$$\rho_c \sim 11\,\mathrm{keV/cm^3} \sim 10^{-46}\,\mathrm{GeV^4} \tag{8.46}$$

一方，インフレーションモデルによれば，$\rho=\rho_v=$const. の時代があった．すなわち宇宙項として

$$\Lambda/8\pi G \sim \rho_v \sim \sigma^4 \sim 10^{60}\,\mathrm{GeV^4} \tag{8.47}$$

をもっていたことになる．力学的に安定な真空に落ち込んでいくに従い $\rho_v \to 0$ になるにしても，量子ゆらぎのオーダーは大統一エネルギースケールで与えられるから，素粒子論的に考えて自然な真空エネルギーの値と，実際に観測されている真空エネルギーの値とは 10^{100} 以上の差がある．これが宇宙項問題であり最も先鋭な微調整問題を提供する．何らかの相殺機構が働くと考えざるをえないが，そのような機構を与える対称性は知られていない．

では，宇宙項は正確に 0 なのであろうか．歴史的には宇宙項は 2 回導入が試みられた．第 1 回はアインシュタインが定常宇宙論をつくろうとして導入したが，膨張宇宙の発見により放棄した．第 2 回目はビッグバン宇宙論に対抗して，完全宇宙原理（宇宙は空間的のみならず時間的にも一様という原理）を成立させるためにボンディ-ゴールド-ホイルにより導入されたが，宇宙背景輻射の発見により放棄を余儀なくされた．このような歴史的背景にもかかわらず，今日再び宇宙項を復活しようという議論が盛んである．理由は，最近のハッブル定数（$H_0=80\pm5\,\mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}}$ [4]）から計算される宇宙年齢（8.2 Gyr; Gyr$=10^9$ 年）が球状星団の分布（16 ± 3 Gyr）や銀河内の白色矮星の年齢から推定される値と矛盾すること，ハッブル法則を光度距離対赤方偏移の関数（(B.16) 参照）としてみるとき，I 型超新星のデータが宇宙項の存在を示唆すること[8]，現在の宇宙の大規模構造形成（後述）など冷たい暗黒物質のみでは説明しきれないこと，また密度ゆらぎのスケール（密度差をとる 2 点間の距離）依存性などいろいろなことが，バリオン，暗黒物質のほかに宇宙項を加えて三者のエネルギー密度のバランスをとるとうまくゆくからであり[*4]，最近の話題となっているが，ここではあくまでも 0 として議論を進める．

[*4] インフレーションモデルは，正確には $\Omega=1$ ではなく，

$$\Omega+\Omega_\lambda \equiv \frac{\rho}{\rho_c}+\frac{\Lambda}{3(H(t))^2}=1$$

を予言する．したがって，宇宙項を入れれば $\Omega_0<1$ とする解（例えば，$\Omega_0=0.2$, $\Omega_\lambda=0.8$）が存在しうる．

8.4 残存ニュートリノ

a. ニュートリノ温度

宇宙初期は，いろいろな粒子が熱平衡状態にあるが，宇宙が膨張するに従い，漸次熱平衡から切り離されていく (decouple). 宇宙温度 $T \fallingdotseq$ 数 MeV ($t \sim 1$ sec) では，熱平衡にある主たる反応はニュートリノ反応と電子対生成消滅反応である.

$$\nu_e + e^{\pm} \leftrightarrow \nu_e + e^{\pm} \tag{8.48 a}$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p \tag{8.48 b}$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n \tag{8.48 c}$$

$$e^- + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma \tag{8.48 d}$$

$T \fallingdotseq 0.72$ MeV で，ニュートリノの反応率 $\Gamma_\nu \fallingdotseq H$ となりニュートリノが切り離され (付録 B.3 参照)，$T \fallingdotseq m_e/3 \fallingdotseq 0.17$ MeV で電子対消滅が一方方向に進行する. 対消滅反応の前後のエントロピー S は保存するので，(8.14) を参照すれば,

$$\left[\frac{4}{3}\frac{V}{T}(\rho_{e-} + \rho_{e+} + \rho_\gamma)\right]_{\mathrm{bef}} = \left[\frac{4}{3}\frac{V}{T}\rho_\gamma\right]_{\mathrm{aft}} \tag{8.49}$$

が成立する. $V \sim R^3$, $\rho_{e-} + \rho_{e+} = 2(7/8)\rho_\gamma$ を考慮すると，エントロピー保存の条件は

$$\left.\frac{11}{4}T^3R^3\right|_{\mathrm{bef}} = T^3R^3|_{\mathrm{aft}}$$

あるいは,

$$T_{\mathrm{bef}} = (4/11)^{1/3}\,T_{\mathrm{aft}}(R_{\mathrm{aft}}/R_{\mathrm{bef}}) \tag{8.50}$$

と書き直せる. この時点で，ニュートリノはすでに自由粒子であるので，ニュートリノ温度は $T_\nu \sim R^{-1}$ のように変化している. 消滅反応以前は $T_\nu = T_\gamma$ であるが，以後は,

$$T_\nu = (4/11)^{1/3}\,T_\gamma \tag{8.51}$$

となる. すなわち，電子対消滅のエネルギーが，フォトン温度を高めるのに対し，ニュートリノには全然寄与しない分だけニュートリノ温度はフォトン温度

より低い．現在のニュートリノ温度は，

$$T_{\nu 0}=(4/11)^{1/3}T_{\gamma 0}\fallingdotseq 1.92^{\circ}\mathrm{K} \tag{8.52}$$

である．

b．赤方偏移

ニュートリノは，切り離し以降は熱平衡状態にない．運動量 p が，$p\sim R^{-1}$ によって赤方偏移していくのみである．これは次のようにして示せる．エネルギー E をもつ粒子が共動座標の微小距離 δx を飛ぶ速度を v とすると，実際の距離は $R(t)$ を掛けて

$$v\delta t=R(t)\delta x \tag{8.53 a}$$

一方，距離が $R(t)\delta x$ 離れていると，膨張により相対速度 $\eta=\dot{R}\delta x$ をもつから，ローレンツ変換すれば

$$p'\sim p-\eta E=p\left(1-\frac{\eta}{v}\right) \tag{8.53 b}$$

ゆえに運動量変化 $\delta p/p$ は，

$$\frac{\delta p}{p}\sim -\frac{\eta}{v}=-\frac{\dot{R}\delta x}{v}=-\frac{\dot{R}}{R}\delta t \tag{8.53 c}$$

となり，

$$pR=\text{一定} \tag{8.54}$$

が成立する．

c．ニュートリノ質量$(m_\nu\ll 1\ \mathrm{MeV})$

ニュートリノは切離しのとき（$T\sim 1$ MeV）は相対論的であり，位相空間の大部分は $p>m_\nu$ である．この部分（$E\fallingdotseq p$）は，切り離し時の数分布（8.9）を維持するので（温度は変わる），仮にニュートリノが非相対論的粒子（すなわち $p\ll m_\nu$）となっていても，式（8.10）をそのまま使ってよい．ニュートリノの数密度は自由度 2 のニュートリノ種あたり

$$n_{\nu 0}=(3/4)n_{\gamma 0}(T_{\nu 0}/T_{\gamma 0})^3=(3/4)(4/11)\times 400\fallingdotseq 110/\mathrm{cm}^3 \tag{8.55}$$

となる．ニュートリノの宇宙エネルギー密度への寄与が臨界密度 ρ_c より小さいという条件から，ニュートリノ質量には次の制限がつく．

$$\sum_i m_{\nu i}\lesssim 100h^2\ \mathrm{eV}=30\sim 70\ \mathrm{eV} \tag{8.56}$$

d. ニュートリノ質量 ($m_\nu \gg 1$ MeV)

$m_\nu \gg 1$ MeV であれば，熱平衡から切り離されるときはすでに非相対論的になっている．このときの数密度は (8.10) から

$$n_\nu \sim (m_\nu T)^{3/2} e^{-m_\nu/T} \tag{8.57}$$

となる．消滅反応 ($\nu + \bar{\nu} \to X$) の断面積は，

$$\sigma \sim A G_F{}^2 m_\nu{}^2 \tag{8.58}$$

で与えられる．ここに A は，開けているチャネルにもよるが，$O(1)$ の定数である．$H > \Gamma_\nu = n_\nu \langle \sigma v \rangle$ になると，消滅反応が起きなくなるので，この時点でのニュートリノ数が凍結され (freeze out)，それ以後は，宇宙膨張に従って数密度が R^{-3} で減るのみである．凍結時の温度を T_{fr} とすると，$m_\nu \gtrsim 1$ GeV のとき $T_{fr} \sim m_\nu/20$ としてよい．m_ν が 1 MeV 程度に小さいと，n_ν は $m_\nu \ll 1$ MeV のときの数に近づくので，ニュートリノのエネルギー密度が臨界密度を大幅に超えてしまう．一方，m_ν が非常に大きいと生き残る n_ν の数が少なくなり，$\rho_\nu \sim m_\nu n_\nu$ は減少する．ニュートリノのエネルギー密度が臨界値を超えないためには，m_ν はある一定の値以上である必要があり，この値は[9]

$$m_\nu > 8\ \text{GeV} \quad (\text{ディラックニュートリノ}) \tag{8.59 a}$$

$$14.4\ \text{GeV} \quad (\text{マヨラナニュートリノ}) \tag{8.59 b}$$

と計算されている．すなわち，宇宙論を使えば，$100\ \text{eV} \lesssim m_\nu \lesssim 8\ \text{GeV}$ は安定なニュートリノに対する質量禁止領域となる．

8.5 宇宙の物質組成

8.5.1 バリオン創生

大統一理論発達以前の標準宇宙論では初期仮定として与えなければならなかったバリオン数非対称，すなわち宇宙初期，何らかの理由でバリオンの数 (B) が，反バリオンの数 ($\bar{B}$) よりわずかに多かったという事実*5)

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B - \bar{B}}{B} \sim \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-9} \tag{8.60}$$

*5) $T \gg \Lambda_{\text{QCD}} \approx 200$ MeV では，バリオンはクォークに分解されているので，本当はクォーク数を扱うのが正しいが，歴史的な理由でバリオン数という名称をそのまま使う．

は大統一理論を使えば自然な帰結として説明できる．$\Delta B/B$ の ΔB は今日宇宙に存在する物質粒子の密度より推察できる．B は宇宙が熱平衡にあった初期におけるバリオン数密度であり，それは現在残っている宇宙背景輻射より計算可能な初期フォトン数密度 n_γ と同程度である．この非対称を説明するシナリオはいくつかある．第1は，はじめから非対称が存在したとするもので真の解答にはならない．第2は，初期条件は $\Delta B=0$ とするが，同じだけある物質と反物質がビッグバン以後のいつかの時点で分離したとする説明である．この議論の難点は，物質と反物質を空間的に分離する機構を未だ見出しえないこと，この宇宙のどこかに反物質が大量に存在する証拠がないことである．宇宙線による観測データは宇宙のあらゆるところで（少なくもアンドロメダ星雲近辺までは），反物質の物質に対する存在比が1万分の1以上ではないことを示している[10]．第3の説明が大統一理論によるもので，宇宙が大統一温度（$T\sim10^{15}$ GeV）から冷える際に，バリオン数非保存過程によりバリオン数過剰が発生したというものである．ただし，バリオン数非保存過程が存在するだけではバリオン数過剰は発生しない．反バリオン数過剰が同じだけ生じて，全体としてはバリオン数と反バリオン数は均衡してしまうからである．バリオン数過剰が生じるためには次の三つの条件（サハロフの3条件[11]）が必要である．

(1)　バリオン数を破る基本過程の存在

(2)　CP 非保存の存在

(3)　バリオン数を破る過程が進行中に，熱平衡が破れる

条件 (1) の必要性は自明であろう．条件 (2) が必要な理由を明らかにするため，非常に重い X ボソンがバリオン数 B_1 と B_2 で特徴づけられる過程に，分岐比 b および $1-b$ で崩壊するとしよう．

$$\frac{\Gamma(X\to B_1)}{\Gamma(X\to \mathrm{all})}=b,\qquad \frac{\Gamma(X\to B_2)}{\Gamma(X\to \mathrm{all})}=1-b \tag{8.61 a}$$

このとき，$\bar{X}$ は

$$\frac{\Gamma(\bar{X}\to \bar{B}_1)}{\Gamma(\bar{X}\to \mathrm{all})}=\bar{b},\qquad \frac{\Gamma(\bar{X}\to \bar{B}_2)}{\Gamma(\bar{X}\to \mathrm{all})}=1-\bar{b} \tag{8.61 b}$$

CPT 定理より

$$\Gamma(\bar{X}\to \mathrm{all})=\Gamma(X\to \mathrm{all}) \tag{8.62}$$

であるから，最初に X と $\overline{X}$ の数は等しかったとすれば

$$\begin{aligned}\Delta B&=(b-\overline{b})B_1+\{(1-b)-(1-\overline{b})\}B_2\\&=(b-\overline{b})(B_1-B_2)\end{aligned}\tag{8.63}$$

$B_1 \neq B_2$ はバリオン数非保存を必要とし，$b \neq \overline{b}$ は CP 非保存を意味する．条件 (3) は次のようにいえる．CPT 保存とユニタリティ条件のみを使い，

$$\sum_r \Gamma(b \to r)=\sum_{\overline{r}} \Gamma(\overline{b} \to \overline{r})=\sum_r \Gamma(\overline{b} \to r)\tag{8.64}$$

最後の等式は和 r および $\overline{r}$ は粒子と反粒子すべてにわたるから，同じ r で置き換えてよいという事実を使った．上式に CPT 変換を施せば

$$\sum_r \Gamma(r \to b)=\sum_r \Gamma(r \to \overline{b})\tag{8.65}$$

熱平衡状態ではすべての r 状態は同じ数だけ存在するから，仮に条件 (1) (2) が成立しても非対称は生じないのである．したがって，宇宙の膨張により熱平衡が破れるという条件が不可欠なのである．具体的な数値はモデルに依存するが，大統一理論を使えば，バリオン数非保存の妥当な値と現在の CP 非保存の実験値を採用することによって，上記の $\Delta B/n_\gamma$ を再現できることが指摘された[12]．

ただし，せっかくつくられたバリオン数非対称が，電弱相互作用のインスタントン効果により相転移時に失われる可能性，もしくはそこでバリオン非対称自身が生成される可能性があることは§6.5 でふれた．しかし，この場合でも，$B-L$ は保存しているので，バリオン非対称が $B-L$ を破る大統一モデル，例えば $SO(10)$ で生成されたとすれば，ヒッグス凝縮による電弱相互作用相転移を経ても生き残る．

この宇宙論の議論は，逆に素粒子論に対して一つの指針を与える．バリオン数発生が本当に上記の機構によるならば，CP 非保存は大統一スケールでも存在するということであり，CP 非保存を対称性の自発的破れに帰するモデルなどに対して相当の制限を課すことになる．

8.5.2 元素合成 (nucleo-synthesis)[2,13]

宇宙初期，温度が $T \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}} \sim 200$ MeV に下がると，前節で議論したわずかな生き残りのクォークの凝縮が起こりハドロンが形成される．しかし，温度が

10 MeV を大きく上回るときは，陽子と中性子は遊離しており，自由粒子として飛び回っている．温度が原子核の結合エネルギー程度に下がってくれば元素合成が行われるようになる．陽子 p と中性子 n から原子核 A を合成するときの熱平衡式は

$$Zp+(A-Z)n \longleftrightarrow A$$

であるので，化学ポテンシャルについては $\mu_A=Z\mu_p+(A-Z)\mu_p$ が成立する．したがって

$$e^{\mu_A/T}=e^{Z\mu_p+(A-Z)\mu_n/T} \tag{8.66}$$

ここで，バリオン数 n_B を

$$n_B=n_n+n_p+\sum_A An_A=\eta_B n_\gamma=\eta_B\left[\frac{2\zeta(3)}{\pi^2}T^3\right] \tag{8.67}$$

とし，各粒子のバリオン数に対する重量比を

$$X_A=\frac{An_A}{n_B},\quad X_p=\frac{n_p}{n_B},\quad X_n=\frac{n_n}{n_B} \tag{8.68}$$

で定義する．各粒子の温度 T における数密度（(8.10 b) 参照）

$$n_i=g_i\left[\frac{mT}{2\pi}\right]^{3/2}e^{(\mu-m)/T} \tag{8.69}$$

を入れて，化学ポテンシャルを消去すれば，

$$X_A=\frac{g_A}{2^A}A^{5/2}X_p{}^Z X_n{}^{A-Z}\left[n_B\left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3/2}e^{B_A/(A-1)T}\right]^{A-1} \tag{8.70 a}$$

$$B_A=Zm_p+(A-Z)m_n-m_A$$

を得る．$[\cdots]^{A-1}$ の中の指数関数の係数は，$n_B=\eta_B n_\gamma=(2.75\times10^{-8}\Omega_B h^2)(2\zeta(3)/\pi^2)T^3$ (8.27 b) を入れて計算すると，

$$\sim 3.74\times10^{-12}\Omega_B h^2\,[\mathrm{T/MeV}]^{3/2} \tag{8.70 b}$$

となって，$B_A/[(A-1)T]$ 因子により指数関数がこの数を相殺する低温（$T=1\sim0.1$ MeV）になるまでは元素合成が進まない．以下，もう少し系統的に段階を追ってみよう．

第1段階：　$T\gg10$ MeV，　$t\ll1$ 秒

この時期，$m\ll10$ MeV の粒子（ニュートリノ，電子，陽電子）は相対論的でありかつ豊富に存在するが，バリオンの数はわずかである．この段階ではまだ弱い相互作用反応が活発であり，核子は次のような反応で熱平衡状態にある．

$$\nu_e + n \longleftrightarrow e^- + p \tag{8.71 a}$$

$$\bar{\nu}_e + p \longleftrightarrow e^+ + n \tag{8.71 b}$$

$$\nu_i + \bar{\nu}_i \longleftrightarrow e^- + e^+ \tag{8.71 c}$$

$$e^- + e^+ \longleftrightarrow \gamma + \gamma \tag{8.72}$$

(8.71) の反応を考えると化学ポテンシャル間には

$$\mu_\nu + \mu_n = \mu_e + \mu_p \tag{8.73}$$

が成立する．非相対論的な粒子の温度 T における数密度 (8.10 b) を使って μ_n と μ_p を消去すれば

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{n_n/n_B}{n_p/n_B} = \frac{X_n}{X_p} = \mathrm{e}^{-(m_n - m_p)/T + (\mu_e - \mu_\nu)/T} \tag{8.74}$$

レプトンの化学ポテンシャルは無視する．その理由づけは，宇宙は電気的に中性であるとすると

$$n(e^-) = n(e^+) + n_p$$

また，平衡式 (8.72) から，$\mu(e^+) + \mu(e^-) = 0$ が成立する．したがって

$$\mathrm{e}^{(\mu(e^-) - \mu(e^+))/T} = \frac{n(e^-)}{n(e^+)} = 1 + \frac{n_p}{n(e^+)} \sim 1 + \eta_B \tag{8.75}$$

から，$2\mu_e/T \sim \eta_B$ となって無視できることがわかる．ニュートリノについては推測するしかないが，電子と同じと考えればやはり無視できるであろう．

レプトンの化学ポテンシャルを無視すれば

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{X_n}{X_p} = \mathrm{e}^{-Q/T}, \qquad Q = m_n - m_p = 1.293\ \mathrm{MeV} \tag{8.76}$$

$T \gg Q$ であるから，

$$X_n = X_p = 0.5 \tag{8.77 a}$$

重水素については，(8.70 a) で $A=2$ とおいて

$$g_D = 3, \qquad B_D = m_p + m_n - m_D = 2.22\ \mathrm{MeV} \tag{8.77 b}$$

を入れると

$$X_D = 4.07 \times \left[\frac{T}{m_N}\right]^{3/2} \eta_B \mathrm{e}^{2.22/T(\mathrm{MeV})} \simeq 6 \times 10^{-12} \tag{8.78}$$

であるので，陽子や中性子に比べ重水素の成分は無視できる．

第 2 段階：　$T \simeq 1$ MeV，　$t \simeq 1$ 秒

$T \approx 0.72$ MeV で弱い相互作用による熱平衡反応が切り離される（付録

B.3). その直後($T \simeq m_e/3$)に, $e^+e^- \to \gamma\gamma$ が一方的に進み $T_\gamma = (11/4)^{1/3} T_\nu$ となる (8.51). この時点で

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-Q/T} \simeq \frac{1}{6}, \quad X_n \simeq \frac{1}{7}, \quad X_p \simeq \frac{6}{7}, \quad X_D \simeq 10^{-12} \tag{8.79}$$

重水素は合成されても, 光分解反応 $\gamma + D \to p + n$ の方が圧倒的に優勢で数が増えない. トリチウムやヘリウムの数はさらに少ない.

第 3 段階: $T = 0.3 \to 0.1$ MeV, $t = 1 \to 3$ 分

この段階では, 重水素やそれより重い核は反応速度は十分あるものの合成のための材料の数が小さくて ((8.70) 式の $\eta_B{}^{A-1}$ 因子), 合成される核子の数は増えない. この間は中性子は平均寿命 $\tau = 887 \pm 2$ sec で崩壊してゆく. $T =$ 0.07 MeV になると, 温度が十分低くなり軽い核の中では束縛エネルギーが大きくて (B(He)$=28.3$ MeV) 安定なヘリウムをつくる反応

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \to n + {}^3\mathrm{He}, \qquad \mathrm{D} + {}^3\mathrm{He} \to p + {}^4\mathrm{He}$$
$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \to p + {}^3\mathrm{H}, \qquad \mathrm{D} + {}^3\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} \tag{8.80}$$

が一方的にかつ急速に進む. ヘリウムより重く安定な核も存在するが, $A = 5$, 6 の安定核がないこと, 素材となる軽い核の数がそもそも少ないこと, 温度が低くなるとクーロン障壁が大きくなるなどの理由でそれ以上重い核が合成され

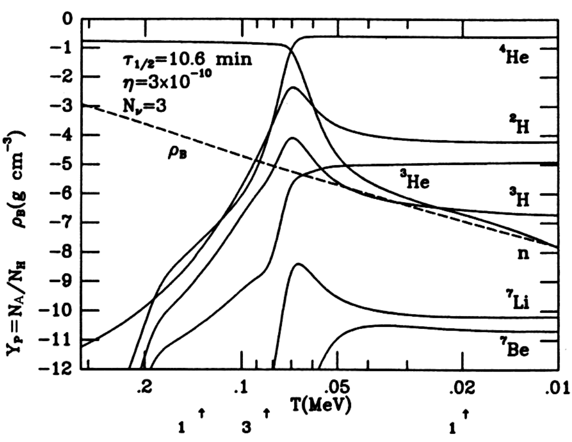


図 8.4 元素合成の発展する様子[2,13]
横軸は温度であるが, 矢印をつけたところには時刻も示してあり, それぞれ 1, 3 分, 1 時間である. 縦軸は水素に対する成分比.

ることはない．これらの様子を図 8.4 に示す．

ヘリウムが合成される段階での中性子（陽子）の数を $n(p)$ とすると，n/p は～1/7 である．これからヘリウム成分の重量比は

$$X_{\mathrm{He}}=\frac{4(n/2)}{n+p}=\frac{2(n/p)}{1+n/p}=\frac{2/7}{8/7}\simeq\frac{1}{4} \tag{8.81}$$

となる．宇宙の元素組成の 75% が水素で 25% がヘリウムであることは観測に裏づけられている．ビッグバン元素合成の提唱者ガモフは，当初ビッグバン時にすべての元素がつくられると提案したが[14]，今日では，ヘリウムより重い元素は星の中で，また超新星として爆発する際につくられることが知られている．ビッグバン時につくられるのは軽い元素のみである．D, ^{3}He, ^{7}Li はつくられるが圧倒的に少ない．しかし，このわずかな量を上記のシナリオを精密化

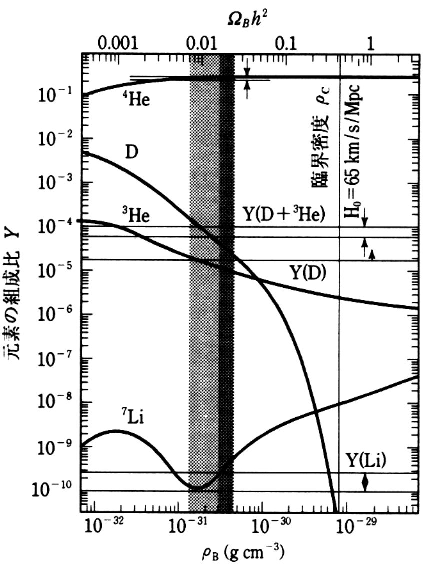


図 8.5 ビッグバン宇宙論で計算した軽い元素の組成比
バリオン密度 ρ_B～3×10^{-31}～4×10^{-31}gr cm^{-3} ととるとここにのせた原子核組成の観測値が再現できる[13]．横線と矢印は観測値を示す．
^{3}He：$Y=0.239\pm0.015$, D：$Y>1.6\times10^{-5}$,
D+He^3：$Y\lesssim6$～10×10^{-5}, ^{7}Li $1.1\times10^{-10}<Y<2.29\times10^{-10}$

して計算したところ実に観測値とよく合うことがわかり（図 8.5），ビッグバン宇宙論を正当化する大きな証拠となっている．

さらに，これらの量は $\eta_B = n_B/n_\gamma$ をパラメターとして含むが，図からわかるように，η_B の許容範囲は狭く絞られており[13)]

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} = 2.75\times10^{-8}\,\Omega_B h^2 \qquad (8.82\,\mathrm{a})$$

$$\Omega_B h^2 = 0.02\pm0.004 \qquad (8.82\,\mathrm{b})$$

$$h = 0.65\pm0.1$$

この Ω_B の値が宇宙論で最も正確なバリオン数密度を表すものとされる．

8.6 宇宙構造の進化

8.6.1 ジーンズ質量

宇宙原理によれば宇宙構造は一様で等方的なはずである．しかし，銀河や銀河団の存在で知られるように，実際の宇宙密度は一様でなく構造をもつ．図 8.6 は地球から 150 Mpc の半径内にある銀河分布であり[15)]，現在までに観測されている非一様分布のなかで最大のスケールをもつ．200 Mpc より大きなスケールでならした密度分布は一様であるとみてよい．

非一様性を定量的に定義するために，まず宇宙の体積でならした平均密度

$$\rho_0 = \Omega_0\rho_c = 1.88\times10^{-28}\Omega_0 h^2\,\mathrm{gr/cm^3} = 2.78\times10^{11} M_\odot \Omega_0 h^2 (\mathrm{Mpc})^{-3} \qquad (8.83)$$

からのずれを問題にする．宇宙空間から直径 λ の球をあちこちから抽出し，球内の平均密度 ρ_1 の宇宙全体の平均密度 ρ_0 からのずれの相対値の自乗平均，すなわち，$\delta\rho/\rho = \sqrt{\langle(\rho_1-\rho_0)^2\rangle}/\rho_0$ とするとき，$\lambda > 200$ Mpc ならば $\delta\rho/\rho \ll 1$ である．もっと小さいスケール，例えば，超銀河団のスケール（$\lambda \approx 20$ Mpc）では $\delta\rho/\rho \sim 1$ である．すなわち宇宙平均の 2 倍程度の物質集中が観測されている（後述 (8.110)）．それより小さいスケールでは $\delta\rho/\rho > 1$ で非線形段階に入っており，物質は互いに強く結びついている．ちなみに典型的な銀河サイズは 30 kpc であり，典型的な質量 $M_G \sim 2\times10^{11} M_\odot$ を

$$M_G \sim (4\pi/3)(\lambda_G/2)^3\rho_0$$

と表し，宇宙の平均密度でこれだけの重量を包含するスケール λ_G を定義する

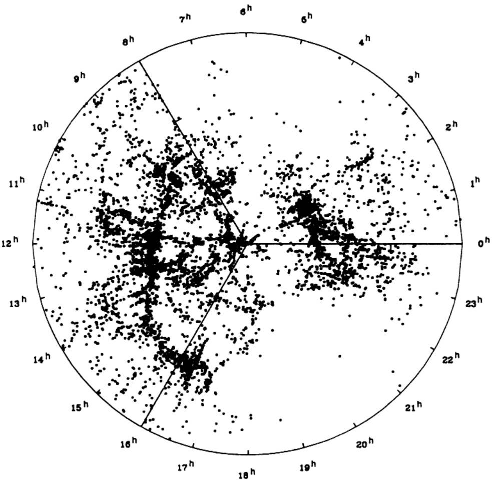


図 8.6 宇宙の大規模構造[15)]

地球から 150 h^{-1}Mpc（~5 億光年）内の 6112 個の銀河の分布．円の中心が地球．9 時~16 時までつらなっているのが巨大な壁（great wall）であり，泡構造なども見える．

と

$$\lambda_G \simeq 1.9\ \mathrm{Mpc}(\Omega_0 h^2)^{-1/3}$$

である．このスケールでは密度ゆらぎ $\delta\rho/\rho \gg 1$ であるので，いったん $\delta\rho/\rho > 1$ になると非線形度が急速に上がることがわかる．これら銀河や銀河団などの現在観測される宇宙構造は，最初は一様であった質量分布にゆらぎが生じ，時とともに成長して現在のようになったと考える．

以下膨張宇宙全体のスケール因子 R（物質優勢ならば時間とともに $\sim t^{2/3}$ のように変化する）と，ある時刻での共動座標系上での宇宙構造物サイズを表すスケール λ（これは時間に無関係）と 2 種類のスケールを使い分ける．以下，この節では特に断らないかぎり現在のスケール $R_0 = R(t_0) = 1$ ととる共動座標系を使用する．このときのスケール λ は現時点 $(t = t_0)$ に焼き直したときのスケールに等しい．例えば，背景輻射切り離し時の地平線の大きさが $d_H(t_{dc})$ というとき，共動座標変数は宇宙の膨張にともない不変であるので，現時点での実際の大きさは，$R_0 d_H(t_{dc}) = d_H(t_{dc})$ である．すなわち宇宙膨張にともない現在ならばこの大きさになったであろう値を扱う．

質量ゆらぎが成長するためには，ゆらぎを分散させようとする圧力に打ち勝つだけの引力すなわち質量の塊（ジーンズ質量 M_J）が存在しなければならない．別のいい方をすれば，重力による落下速度が音速 v_s より大きくなる質量ともいえる．直径 λ_J' の球内で圧力による運動エネルギーが重力に負けるという条件を書くと

$$\frac{v_s^2}{2}<\frac{GM_J}{\lambda_J'/2}=\frac{\pi G\rho\lambda_J'^2}{3},\quad v_s^2=\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\mathrm{adiabatic}} \tag{8.84}$$

(8.2)，(8.21) を使えば，

$$\lambda_J'=v_s\left(\frac{2\pi G\rho}{3}\right)^{-1/2}=\frac{2v_s}{H}=4v_st \qquad t<t_{eq} \tag{8.85}$$

となる．(8.85) の最後の式は輻射優勢の時代に成立する．詳しくはニュートン力学の流体方程式を解いてゆらぎが増加する条件を決める．この場合 λ_J' の代わりに

$$\lambda_J=v_s\left[\frac{\pi}{G\rho}\right]^{1/2}=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_J'=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{v_s}{H} \tag{8.86}$$

が得られるので，以下はこの定義を使うことにする．λ_J はジーンズ質量を含む領域の大きさでジーンズ波長と呼ばれる．(8.85) の最後の式から，物理的にはジーンズ波長とはハッブル時間 H^{-1} に音速で走れる距離と定義できる．またこれからバリオンのジーンズ質量 M_J が推定できる．

$$M_J=\frac{4\pi}{3}\rho_B\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3=\frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^4\rho_B\frac{v_s^3}{H^3} \tag{8.87}$$

λ_J を実際の距離に直すにはスケール因子 R を掛けなければいけないが，質量で表すとスケールに依存しない量となるので便利である．

輻射優勢の時代は，(8.84)，(8.12) より $v_s=c/\sqrt{3}$ と求められるから，$\lambda_J\sim(2\sqrt{2}\pi/3)ct\gtrsim d_H$ である．すなわち，密度ゆらぎを成長させるのに必要なジーンス波長はその時点での地平線より大きい．このような長大スケールでは，ニュートン近似式はもはや適用できないが，いずれにしろ密度ゆらぎを成長させることはできない．輻射が切り離されていない状態では，バリオンの密度ゆらぎが発生してもフォトンの圧力により成長できず音波として伝播するのみである．

一方，切り離し以降は，圧力はバリオン自身の運動エネルギーにより提供さ

れるので，$v_s{}^2=(5/3)T_B/\mathrm{m}$ となる ((8.10 b), (8.12) を使え). T_B はバリオン温度である．一旦輻射と切り離されるとバリオン温度 ($\sim\langle p^2\rangle$) は $R^{-2}\sim T^2$ のように振る舞うから，$T_B=T^2/T_{dc}$ である．再結合後は $\rho\fallingdotseq\rho_B$ として (8.82) (8.10 a) を使えば

$$\rho_B=n_B m\fallingdotseq m\eta_B n_\gamma=m\eta_B\frac{2}{\pi^2}\zeta(3)T^3 \tag{8.88}$$

となり，M_J の式 (8.87) に入れれば，

$$M_J=\frac{5\pi^3}{18}\sqrt{\frac{5\pi}{6\zeta(3)}}\frac{M_{Pl}{}^3}{\eta_B{}^{1/2}m^2}\left[\frac{T}{T_{dc}}\right]^{3/2}\fallingdotseq 1.25\times10^5(\Omega_B h^2)^{-1/2}\left[\frac{z}{1100}\right]^{3/2}M_\odot \tag{8.89}$$

となる．$M_\odot$ は太陽質量である．このジーンズ質量の大きさは，ほぼ球状星団 (globular cluster) の質量に匹敵し，銀河質量 $\sim10^{11}M_\odot$ よりはるかに小さい．このように，質量ゆらぎが成長するためには，バリオンが背景輻射から切り離されることが基本的に必要であることがわかった．次に質量ゆらぎが十分成長するだけの時間があったかをチェックする．

8.6.2 ゆらぎの成長

まず，質量ゆらぎは，宇宙膨張とともに $\propto R$ のように成長することを示そう．これは次のように考えればよい．あるところで平均密度 ρ_0 より濃いところ (ρ_1) が局所的に生じ，そこでは重力が膨張に勝って収縮に向かうと仮定しよう．二つの領域がともに同じハッブル速度で膨張しているとすれば，密度のゆらぎは曲率のゆらぎと見なすことができる．

$$H^2=\frac{8\pi G\rho_1}{3}-\frac{k_1}{R^2}\qquad H^2=\frac{8\pi G\rho_0}{3}-\frac{k}{R^2}$$

ゆえに

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_0}=\frac{k/R^{-2}}{8\pi G\rho_0/3} \tag{8.90}$$

物質優勢時は $\rho\propto R^{-3}$ であるから，$\delta\rho/\rho\propto R$ となる．密度ゆらぎ $\delta\rho/\rho$ が1程度以上に大きくなると，ゆらぎの進行は非線形となり構造形成は急速に進む．

この事実と輻射背景の一様性は直ちに問題を提起する．すでに述べたように，背景輻射が切り離される以前はバリオンの密度ゆらぎは成長することができない．バリオンの密度ゆらぎ発生はフォトン切り離し以後である．現在の密

度ゆらぎは少なくも ~1 であるから，t_{dc} のときの密度ゆらぎは

$$\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{dc}=\frac{\delta\rho(t_0)}{\rho}\frac{R(t_{dc})}{R(t_0)}\sim\frac{\delta\rho(t_0)}{\rho(1+z_{dc})}\sim 1\times 10^{-3} \tag{8.91}$$

でなければならない．一方観測された背景輻射の温度ゆらぎは ≒10^{-5} であるので，背景輻射の密度ゆらぎは断熱的とすれば

$$\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{dc}\sim 4\frac{\delta T}{T}\sim 10^{-4} \tag{8.92}$$

である．バリオンの密度ゆらぎは $t=t_{dc}$ のときは背景輻射の密度ゆらぎと同じはずであるから，これは矛盾である．この解決は暗黒物質によって与えられる．もし，フォトンと相互作用しない粒子が宇宙に大量に存在していれば，輻射の切り離し以前でも，物質優勢になった時点 (t_{eq}) で密度ゆらぎを発展させることが可能である．$R(t_{eq})/R(t_0)=(1+z_{eq})^{-1}\sim 10^{-4}$ ((8.29)) はちょうど欲しいだけの密度ゆらぎを与えるのに適正な値をもつ．輻射が切り離されると，バリオンはすでに発達していた暗黒物質の密度ゆらぎによる重力場に捕捉され，バリオンの密度ゆらぎは暗黒物質の密度ゆらぎに急速に追いついて等しくなる．

8.6.3 暗黒物質 (dark matter)の役割[16,17]

暗黒物質の存在証拠はたくさんある．暗黒物質はバリオンではなく，弱い相互作用をする粒子 (WIMPS＝weakly interacting massive particles) と考えられている．電気的にもカラー (QCD) 的にも中性でなければならない．

(1) うず巻銀河の周辺にある物体 (水素分子雲など) は，光っている銀河の大きさの 10 倍近くまで，一定の回転速度をもつ．これは物質密度の一定な領域が同程度に広がっていることを示す．

(2) ヴィリアル定理 (付録 B.4) を使った超銀河団の運動計算や，超銀河団の発する X 線スペクトルの強度から推定される発光源の質量が，光る銀河団の 100 倍近く大きな質量をもつことを示唆する．

(3) 標準宇宙論による総バリオン密度 Ω_B の予測は $\Omega_B=0.02\pm 0.004$[13] であるが，観測は $\Omega_0\sim 0.1\sim 0.3$ を示し，インフレーションモデルは $\Omega_0=1$ を予言する．すなわち暗黒物質の存在とそれがバリオンではないとの推定

ができる．

ニュートリノのジーンズ質量： 暗黒物質の一つの候補はニュートリノである．この場合のジーンズ質量を計算してみよう．ニュートリノの相互作用は弱いので衝突はほとんどない (free streaming という)．この場合音速は分散速度で置き換えてよい．一旦物質優勢になればゆらぎの成長が始まるので，ニュートリノのジーンズ波長 $\lambda_{J\nu}$ は，$t \leqq t_{eq}$ でニュートリノの飛べる最大到達距離と見なしてよい．ゆえに，t_{NR} をニュートリノが非相対論的になる時刻とし，ジーンズ波長を共動座標で書くと

$$\lambda_{J\nu}=\int_0^{t_{NR}}\frac{c\mathrm{d}t'}{R(t')}+\int_{t_{NR}}^{t_{eq}}\frac{v(t')\mathrm{d}t'}{R(t')} \tag{8.93}$$

$t>t_{NR}$ では $v=p/m_\nu \sim R^{-1}$ で変化するから，$v(t)=cR_{NR}/R(t)$，また $t<t_{eq}$ は輻射優勢時代であるから，$t=t_{NR}(R(t)/R_{NR})^2$ を入れて計算すると，

$$\lambda_{J\nu}\fallingdotseq\left[\frac{ct_{NR}}{R_{NR}}\right]\left[2+\ln\left(\frac{t_{eq}}{t_{NR}}\right)\right] \tag{8.94}$$

を得る．$T_{NR}=m_\nu/3$ とすれば t_{NR} は (8.23) から

$$t_{NR}\fallingdotseq 1.2\times10^{13}(m_\nu/\mathrm{eV})^{-2}(T_\nu/T_\gamma)^2 \tag{8.95 a}$$

$$\frac{t_{eq}}{t_{NR}}\fallingdotseq\left[\frac{m_\nu}{17(\Omega_0 h^2)(T_\nu/T_\gamma)\mathrm{eV}}\right]^2 \tag{8.95 b}$$

$T_\nu/T_\gamma=0.71$ はニュートリノ温度とフォトン温度の差の補正項である．上の $\lambda_{J\nu}$ に $R(t_0)$ を掛けてやれば現時点での長さに換算した $\lambda_{J\nu}$ が得られる．$\ln(t_{eq}/t_{NR})\fallingdotseq 3$ とおき，

$$R_{NR}/R(t_0)=(T_0/T_{NR})(T_\nu' T_\gamma)=7.0\times10^{-4}(\mathrm{eV}/m_\nu)(T_\nu/T_\gamma) \tag{8.96}$$

と $\Omega_\nu h^2=(m_\nu/100\,\mathrm{eV})$ を使えば，$h=0.7$ として

$$\lambda_{J\nu}\fallingdotseq 20\,\mathrm{Mpc}(m_\nu/30\,\mathrm{eV})^{-1}$$
$$m_{J\nu}\fallingdotseq 4\times10^{14}(m_\nu/30\,\mathrm{eV})^{-2}M_\odot \tag{8.97}$$

を得る．これは超銀河集団スケールの大きさである．

上の議論から，暗黒物質構成粒子が相対論的 (熱い暗黒物質) であれば，ジーンズ質量が大きいことがわかる．暗黒物質がニュートリノの場合，30 eV 程度の質量をもてばまず超銀河団が形成され，ゆらぎが発達するにつれ銀河集団から銀河へと分裂していく (上から下へのシナリオ)．もし，暗黒物質が非相対論的 (冷たい暗黒物質) であればジーンズ波長の大きさは暗黒物質の種類

によりさまざまであるが，球状星団程度に小さい領域から出発することも可能である．このときは，まず銀河ができ銀河団へと成長していく（下から上へのシナリオ）．種々のシミュレーション結果は，冷たい暗黒物質に有利である．また，銀河や 2 重銀河などのスケールの小さい暗黒物質はニュートリノでは説明できないので，暗黒物質のすべてがニュートリノという可能性はすでに否定されている．しかし，100 Mpc にも及ぶ大規模構造（図 8.6）の存在は冷たい暗黒物質のみでは説明できず．冷たい暗黒物質と熱い暗黒物質を混ぜるシナリオが検討されている．

熱い暗黒物質の代表的候補がニュートリノであり，冷たい暗黒物質の候補はニュートリノ以外のほとんどすべての粒子を含む．代表的な冷たい暗黒物質としてはアクシオンと超対称性粒子の仲間ニュートラリーノがあげられる．アクシオンは質量が非常に小さいが，運動量 0 のボース凝縮体として振る舞い冷たい暗黒物質の中間である（第 6 章参照）．暗黒物質の正体は不明であり，現在活発な探索活動が行われている．

8.6.4 銀河分布とパワースペクトル

ここでは，現在の観測データを照合して，ゆらぎのスペクトル構造を調べる．密度ゆらぎを場所の関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ と表し，ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{r})$ を

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r})-\rho_0}{\rho_0} \tag{8.98}$$

で定義して，波の重ね合わせとしてフーリエ展開すれば，

$$\delta(\boldsymbol{r})=\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\xrightarrow{V\to\text{大}}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad (8.99)^{*6)}$$

実際に定量化するのは密度のゆらぎの自乗である．

$$\langle\delta(\boldsymbol{r})^2\rangle\equiv\frac{V^{-1}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}|\delta(\boldsymbol{k})|^2=\frac{1}{V}\int_0^\infty\frac{k^3|\delta_k|^2}{2\pi^2}\frac{\mathrm{d}k}{k}=\int_0^\infty \varDelta_k{}^2\frac{\mathrm{d}k}{k} \tag{8.100}$$

ここで等方性より $\delta(\boldsymbol{k})=\delta(|\boldsymbol{k}|)\equiv\delta_k$ とした．

$$\varDelta_k{}^2\equiv V^{-1}\frac{k^3|\delta_k|^2}{2\pi^2} \tag{8.101}$$

---

*6) V は規格化のために導入する体積であり，便宜上 $V\to\infty$ 連続極限で $\delta(\boldsymbol{k})\to V^{-1}\delta(\boldsymbol{k})$ と再定義する．

で定義される Δ_k^2 はパワースペクトルと呼ばれる量で（$|\delta_k|^2$ 自身を指すこともある）無次元のパラメターである．Δ_k は実空間のスケール $\lambda=2\pi/k$ のゆらぎを表す．今宇宙空間の任意の点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}_i$ で，半径 $r_0=\lambda/2$ の球をサンプルし，その中における総重量を M_i とする．次式で定義されるウィンドウ関数 $W(\boldsymbol{r})$ を使うと，

$$W(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1 & r\leqq r_0\\ 0 & r>r_0\end{cases} \qquad V_W=\int W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{8.102 a}$$

$$M_i\equiv M(\boldsymbol{x})=\int\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \bar{M}=\langle M(\boldsymbol{x})\rangle \tag{8.102 b}$$

と表すことができる．この平均値 $\bar{M}$ は，半径 r_0 の領域 i をあちこちから拾ってきて，その平均値という意味である．スケール λ での質量ゆらぎ δ_M を次式で定義すると，

$$\delta_M(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V_W\rho_0}\int[\rho(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x})-\rho_0]W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{V_W}\int\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}r \tag{8.103}$$

$$\therefore \quad \delta_M{}^2=\left\langle\left(\frac{1}{V_W}\int\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)^2\right\rangle\equiv\delta_\lambda{}^2 \tag{8.104}$$

と表されるから，δ_M はスケール $\lambda=2r_0$ で平均した密度ゆらぎ $\sqrt{\langle\delta(\boldsymbol{r})^2\rangle}$ を表すことがわかる．ここで，$\delta(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換式 (8.99) とウィンドウ関数のフーリエ変換式

$$W(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}W(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.105}$$

を入れれば，

$$\int\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})W(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\delta_k W_k\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

であるから，(8.100) 式で $\delta_k\to\delta_k W_k$ とするだけで $\delta^2\to\delta_M{}^2$ となる．すなわち

$$\delta_M{}^2=\delta_\lambda{}^2=\frac{1}{V_W{}^2}\int_0^\infty\Delta_k{}^2W_k{}^2\frac{\mathrm{d}k}{k} \tag{8.106}$$

(8.102 a) で表されるウィンドウ関数のフーリエ変換は，

$$W_k=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}W(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=3V_W\left[\frac{\sin kr_0-kr_0\cos kr_0}{(kr_0)^3}\right]=3V_W\frac{j_1(kr_0)}{kr_0} \tag{8.107 a}$$

$$V_W=\frac{4\pi}{3}r_0{}^3 \tag{8.107 b}$$

と表される．パワースペクトルを表現する際よく使われるモデルは，$\varDelta_k^2=Ak^{n+3}(|\delta_k|^2\sim k^n)$ であるが，このとき，

$$\delta_M{}^2=\frac{1}{V_W{}^2}\int_0^\infty \varDelta_k{}^2 W_k{}^2\frac{\mathrm{d}k}{k}=9\int\frac{\mathrm{d}k}{k}\varDelta_k{}^2\left[\frac{\sin kr_0-kr_0\cos kr_0}{(kr_0)^3}\right]^2 \tag{8.108}$$

しばしば，$z\leqq1$ (>1) のとき，$3j_1(z)/z=1(0)$ という近似を使う．その場合

$$\delta_M{}^2=\frac{\varDelta^2(k=\pi/r_0)}{n+3} \tag{8.109}$$

すなわち，$n>-3$ ならば質量ゆらぎはパワースペクトルに直接比例する．なお，$k\to\infty$ で $W_k{}^2\propto k^{-4}$ であるから，短波長成分が無視できるためには，$n<-1$ の条件がつくが，この条件はウィンドウ関数を適当に選べば（例えばガウス関数 $W(r)=\exp(-r^2/2r_0{}^2)$ を使えば）除けるので通常は気にしない．

観測によれば，$r_0=8h^{-1}$Mpc で $\delta_M=1$ となる[18]．すなわち

$$\delta\rho/\rho<1 \qquad \lambda>16h^{-1}\,\mathrm{Mpc} \tag{8.110}$$

銀河相関関数：　相関関数 ξ を次式で定義する．

$$\xi(\boldsymbol{x})=\langle\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r})\rangle=\frac{V^{-1}}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}|\delta_k|^2\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8.111}$$

$$\therefore\quad |\delta_k|^2=V\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\xi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.112}$$

ここで銀河の質量密度が光を出す銀河の数密度 $n(r)$ に比例するというもっともらしい仮定をすると，ある銀河を中心に，半径 r，体積 δV の球殻の中にある銀河の数は

$$n(\boldsymbol{r})=\bar{n}\delta V(1+\xi(r)) \tag{8.113}$$

で与えられる．等方性の仮定から $\xi(\boldsymbol{r})=\xi(r)$ とした．観測からは（図 8.7）

$$\xi_{GG}(r)\simeq(r/5.4h^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1})^{-1.8} \qquad r\lesssim10h^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{8.114 a}$$

$$\xi_{CC}(r)\simeq(r/25h^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1})^{-1.8} \qquad r\lesssim100h^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{8.114 b}$$

ここに，ξ_{GG} は銀河の個数の相関係数である．ξ_{CC} は銀河団の個数の相関関数を表し ξ_{GG} よりは大きいスケールをみているのにもかかわらず相関係数のベキが等しいというのは興味あることである．

$|\delta_k|^2=AVk^n$ とすると

$$\xi(r)=\frac{V^{-1}}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}|\delta_k|^2\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{Ar^{-n-3}}{2\pi^2}\Gamma(n+2)\sin\frac{(n+2)}{2}\pi \tag{8.115}$$

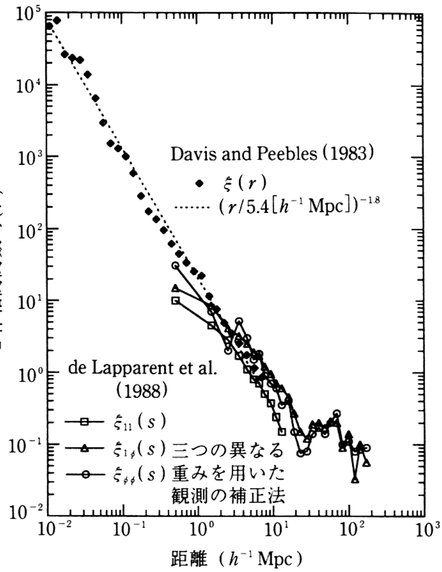


図 8.7　銀河分布の 2 体相関関数[19)]
図は須藤 靖著：ダークマターと銀河宇宙（パリティ物理コース）図 2.3
を修正転載したもの.

であるので,

$$\xi \propto r^{-1.8} \longrightarrow n = -1.2 \tag{8.116}$$

を意味する．相関関数を $|\delta_k|^2$ に変換するには，$0<r<\infty$ の全領域での値を必要とするが，これは困難であるので次の $J_3(r_0)$ がよく使われる．

$$J_3(r_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{r_0} \mathrm{d}r \xi(r) = \int_0^{r_0} \mathrm{d}r r^2 \xi(r) = r_0^3 \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{k} \Delta_k^2 \frac{j_1(kr_0)}{kr_0}$$

$$\simeq \frac{r_0^3}{3} \times 9 \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{k} \Delta_k^2 \left[\frac{j_1(kr_0)}{kr_0}\right]^2 = \frac{r_0^3}{3} \delta_M^2$$

$$\therefore \quad \delta_M^2 = \frac{3J_3(r_0)}{r_0^3} \tag{8.117}$$

以上の議論から，あるスケールでの質量ゆらぎや相関関数の観測値を使ってパワースペクトルが推定できる．$\lambda \gtrsim 200$ Mpc のスケールでは，観測上宇宙には目だつ構造がなく，宇宙は大きなスケールでは一様であるという標準宇宙論の

仮定を裏づけている．

原始ゆらぎ：　上に述べたように観測データからは，現時点でのスケールが，$\lambda \gtrsim 20$ Mpc ならばゆらぎは発達の線形領域にあるので，過去にさかのぼって原始ゆらぎを推定することがある程度可能である．

$R \propto t^{\alpha}$ ($\alpha=2/3$ 物質優勢，$=1/2$ 輻射優勢) のとき，地平線は $d_H = t(1-\alpha)^{-1}$ (式 (8.22)) で与えられる．したがって，現時点である λ というスケールを指定したとき，$\lambda \propto t^{2/3}$, $d_H(t) \sim t$ であるから，十分過去にさかのぼれば，このスケール λ は地平線より大きくなる．つまり地平線の外に出る．地平線の外では因果律が効かないから重力によるゆらぎの発達はなく原始のゆらぎのままである．地平線の中に入っても輻射優勢であればゆらぎの発達はほとんどない．物質優勢になればゆらぎは成長するが，先に述べたようにバリオンは $t=t_{dc}$ まで輻射に結合しているのでバリオンゆらぎは成長しない．しかし，輻射と相互作用しない暗黒物質であれば，輻射優勢が物質優勢に変わる t_{eq} 以降に地平線に入ってきたスケールでのゆらぎは成長する．この意味で $t=t_{eq}$ 時点における地平線の大きさ $d_H(t_{eq})$ が重要な役割を演じる．

いま原始のゆらぎを考えるために，ゆらぎに伴う局所重力の強さを考察してみよう．一般相対論では計量テンソルのゆらぎであるが，非相対論的にはニュートンの重力ポテンシャル ϕ を考える．厳密にいえば，スケールが地平線程度になるときは一般相対論を使わないといけないが，定性的議論はこれで十分である．スケール $\lambda=2\pi/k$ の球内の物質による重力ポテンシャルは $\phi \sim (\pi/6)G\rho_0\lambda^3/\lambda$ で与えられるから，曲率ゆらぎは

$$\delta\varkappa \simeq \left.\frac{\delta\phi}{c^2}\right|_{\lambda} \simeq \delta_{\lambda}\frac{G\rho_0}{c^2}\lambda^2 \simeq \Delta_k\frac{\lambda^2}{(ct)^2} = \Delta_k\left[\frac{\lambda}{d_H(t)}\right]^2 \simeq k^{(n-1)/2} \tag{8.118}$$

ここで，$\delta_{\lambda} \propto \Delta_k$ (式 (8.106), (8.109)) とフリードマン方程式 $H^2 \sim (8\pi/3)G\rho_0$ を使った．$n=1$ ならば曲率 (計量) ゆらぎはスケールに依存しない．これをハリソン-ゼルドヴィッチの等曲率スペクトルという．これは，インフレーションモデルの予言するところでもある．(8.118) をみれば，$\delta\varkappa$ は $\lambda = d_H$ のときの Δ_k に等しいから，$n=1$ のスペクトルは，地平線に入るときはスケールによらず常に一定のゆらぎの大きさをもつという性質をもっている．$t > t_{eq}$ に地平線に入ったゆらぎについては，宇宙膨張に伴い $\delta \sim R$, $\rho_0 \sim R^{-3}$,

$\lambda^2 \sim R^2$ のような R 依存性をもつから，δx は R すなわち時間によらない．言い換えれば，$\lambda > d_H(t_{eq})$ のスケールについては，$\Delta_k \sim \lambda^{-2} \sim k^2$ という形をもつ．一方，$\lambda < d_H(t_{eq})$ の Δ_k は，$t = t_{eq}$ までは成長できないから，スケールによらずほぼ一定値をとる．すなわち，ハリソン-ゼルドヴィッチのスペクトルを採用すると，パワースペクトル $|\delta_k|^2$ は大ざっぱにいって

$$|\delta_k|^2 \sim k \qquad k < 2\pi/d_H(t_{eq}) \tag{8.119 a}$$

$$|\delta_k|^2 \sim k^{-3} \qquad k > 2\pi/d_H(t_{eq}) \tag{8.119 b}$$

$$d_H(t_{eq}) = 2ct_{eq}(R_0/R(t_{eq})) \simeq 26(\Omega_0 h^2)^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{8.119 c}$$

という形をもつ．熱い暗黒物質（HDM）の場合は，ニュートリノのジーンズ質量のところで述べたように，$\lambda_{J-\nu} \sim 20\ \mathrm{Mpc}(m_\nu/30\ \mathrm{eV})^{-1}$ であるので，パワースペクトルは，$\lambda < \lambda_{J-\nu}$ で切断される．冷たい暗黒物質（CDM）の場合はこのような切断はなく，スペクトルは下まで伸びている．現時刻 (t_0) での観測ではすでに述べたように，$\lambda \lesssim 100\ \mathrm{Mpc}$ で $|\delta_k|^2 \sim k^{-1.2}$ である．実際に宇宙構造発展を追跡するにあたっては，$t \approx t_{dc}$ を出発点とし，$\Omega_M = \Omega_B$（バリオン）$+ \Omega_{CDM}$

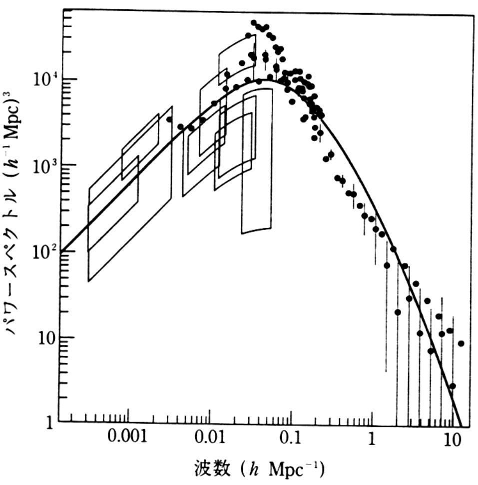


図 8.8 銀河分布のパワースペクトル[19)]

横軸は波数 k すなわち波長に逆比例する．$k=1$ はおよそ 7 Mpc に相当する．縦軸はゆらぎの自乗．

実線は冷たい暗黒物質モデルで標準的なパラメターを設定して得られる．

一番左の四角が COBE による背景輻射のゆらぎより，他の四角も種々の温度ゆらぎより得たデータの許容範囲，●は Cfa, IRAS, APM などによるデータを表す．

$+\Omega_{HDM}$, $\Omega=\Omega_M+\Omega_\lambda$ (宇宙項 (B.5) 参照) やハッブル定数 H_0 など種々のパラメターを適当に設定したうえで，ゆらぎの位相は乱雑ガウス型を仮定し，N 体シミュレーション計算を実行する．こうした宇宙の銀河 (団) 分布構造再現の試みは，かなりの程度成功しているが，各パラメターのとり方でいろいろな選択が可能である[20,21] (図 8.8).

8.6.5 宇宙背景輻射 (CMB) のゆらぎ

宇宙背景輻射 (CMB : cosmic microwave background radiation) の存在は，ホットビッグバン宇宙論の最大の根拠である．$T_0=2.728\pm0.002$ K と非常によい精度で黒体輻射のスペクトルを再現しているが，そのゆらぎについての観測データはつい最近まで上限しか得られなかった．このゆらぎの小ささが暗黒物質の理論的・観測的な証拠を与えることはすでに議論した．最近の COBE による観測で，角分解能 $\sigma=10$ 度の温度ゆらぎが $\delta T/T\sim10^{-5}$ と求められ，インフレーションモデルとほぼ整合することが確かめられた．宇宙背景輻射の温度ゆらぎは宇宙論における種々の重要パラメターを決めるのに最適であるので，より精密測定を目指して次々と観測衛星が打ち上げられる予定である．ここでは，背景輻射のゆらぎの現象論を述べるにとどめる．

天空のある方向を $\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\varphi)$ として，温度ゆらぎ $\delta T/T(\hat{\boldsymbol{r}})$ を次のように展開する．

$$\frac{\delta T}{T_0}(\hat{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}+\sum_{l=2}\sum_{m}a_{l,m}Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{8.120}$$

T_0 は T の平均値である．異方性が統計的に等方的であれば，φ にはよらず

$$\langle a_{l,m}a_{l',m'}\rangle=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\langle|a_l|^2\rangle \tag{8.121}$$

が成り立つ．β は地球の宇宙背景輻射に対する速度である．観測によれば，第 1 項が第 2 項以下に比べて圧倒的に大きく，

$$T_1\equiv T_0\beta=3.36\pm0.1\times10^{-3}\ \mathrm{K}$$
$$v=c\beta=369.19\pm19\ \mathrm{km} \tag{8.122}$$

を与える[22]．温度ゆらぎの式 (8.120) の右辺第 1 項は，黒体輻射を表す式 (8.9) をローレンツ変換すればでてくる．したがって，背景輻射に対する静止系の量に直すため，通常はこの $l=1$ 成分 (双極子成分) を差し引いた $l\geqq2$ の

成分を問題にする．COBE の観測データは[23,24)]

$$c_2 \equiv \sqrt{(2l+1)}\,|a_2| = 4.8 \pm 1.5 \times 10^{-6} \tag{8.123}$$

を与える．$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_2$ だけ離れた方向のゆらぎの非等方性を次式で定義すると，

$$\left[\frac{\delta T}{T_0}(\hat{\boldsymbol{r}})\right]^2 \equiv \left\langle \left[\frac{T(\hat{\boldsymbol{r}}_1) - T(\hat{\boldsymbol{r}}_2)}{T_0}\right]^2 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{l=2}^{\infty}(2l+1)\langle a_l^2 \rangle P_l(\cos\theta)\, e^{-(l+1/2)^2\sigma^2} \tag{8.124}$$

第2式は，角分解能 σ[*7)] をもつ二つのアンテナで望んだとき得られる式である[25)]．ルジャンドル関数 P_l が $-1<\cos\theta<1$ で l 個のゼロ点をもつことを考えれば，$c_l^2 = (2l+1)|a_l|^2$ は視角スケール $\theta \simeq 180^\circ/(l+1)$ で見たゆらぎに相

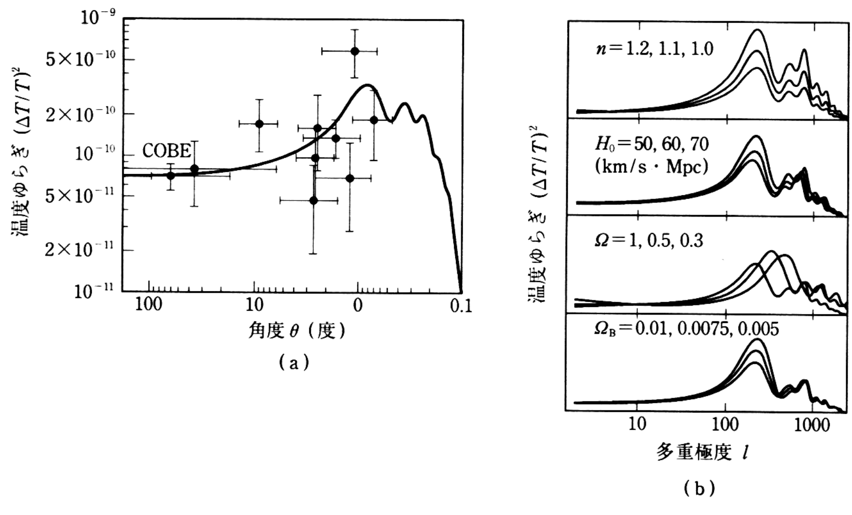


図 8.9　宇宙背景輻射の温度ゆらぎ[19,20)]

角度スケール $\theta \simeq 180^\circ/l$（$l$ は球面調和関数 $Y_l(\theta,\varphi)$ で展開したときの多重極度）と温度ゆらぎの関係．いろいろなデータとモデルの比較．図 7.10 (a) ではゆらぎの初期条件としてハリソン-ゼルドヴィッチスペクトルを仮定し，COBE の観測値に絶対値を合わせている．図 7.10 (b) は n（パワースペクトルのべき乗数），ハッブル定数 H_0，密度パラメター Ω，バリオンの密度 Ω_B を変えたときスペクトルがどう変化するかを示している．図中の数字は三つの曲線を $l=100$ の位置で上から順に表す．$l \simeq 200$ の山は，背景輻射切り離し時の音波の第 1 の腹に相当する．第 2，第 3 の腹も見える．

---

*7)　検出器のウィンドウ関数を，

$$\mathrm{d}R(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\theta^2/2\sigma^2}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

とする．

当する．COBE は，$\sigma=10^\circ$ で

$$\frac{\delta T}{T}=1.1\pm0.18\times10^{-5} \tag{8.125}$$

を与えた[23,26]．これに反し 1° より小さなスケールでは非常にばらつきが大きく今のところは不正確な値しか得られていない．

宇宙背景輻射の温度ゆらぎ $(\delta T/T)^2$ の観測データを図 8.9 (a) に示す[21]．実線は冷たい暗黒物質優勢な宇宙モデルに基づいた計算を COBE のデータで絶対値を合わせたものである．輻射切り離し時の地平線のスケールは，視角でいえば $\theta\simeq1^\circ$ に相当する．それより大きなスケールは輻射切り離し時には地平線の外にある．この場合の温度ゆらぎは重力ポテンシャルゆらぎによる赤方偏移を表し（ザックス-ウォルフェ (Sacks-Wolfe) 効果），スケールによらない ($\delta T/T\simeq$定数)．断熱ゆらぎを仮定すれば，切り離し前のゆらぎは音波として振動しており，切り離し時の地平線スケールを波長とする定在波モードが観測されることになる．$\theta\simeq1^\circ$ の最初の山 ($l\sim200$) は第 1 の定在波に対応する．第 2，第 3 の定在波に対応する山や谷も見える ($100<l<1000$)．

一方，フォトンとバリオンとの完全結合時には，混合体を理想気体として考えてよかったが，切り離し時には，フォトンのトムソン散乱により平均自由行程は $L_f\sim1/(\sigma_T\cdot n_BX_e)$ 程度となり，時間 t の間に $L_s\sim(ctL_f)^{1/2}$ の拡散が起こるようになる．これにしたがって $\lambda<L_s$ 以下のスケールのゆらぎは完全に消えてしまう．これをシルク減衰と呼び，$l\gtrsim2500$ では音波の減衰を引き起こす．切り離し時の地平線の大きさが，音波の腹や節に反映されるとすれば，θ_{dc} はだいたい $1^\circ\sqrt{\Omega_0}$ のところにある．なぜなら，音波の地平線を λ_J とすれば，ゆらぎの強くなるところは，

$$D=\frac{\lambda_J}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{v_s}{H}\sim\frac{0.74c}{H_0\Omega_0^{1/2}(1+z_{dc})^{3/2}} \tag{8.126 a}$$

ここで，$v_s=1/\sqrt{3}$ と (B.12 c) を使った．これを角径距離 d_A (B.18 b) で割れば，

$$\delta\theta=\frac{D}{d_A}=\frac{D}{2/(H_0\Omega_0 z_{dc})}\sim0.011\Omega_0^{1/2}\sim0.64^\circ\Omega_0^{1/2} \tag{8.126 b}$$

したがって山の位置により Ω_0（正確には $\Omega_0+\Omega_\lambda$）が推察できる．山の高さはバリオンと暗黒物質の量に依存するので Ω_B に（H_0 にも）敏感である．図 8.9

(b) には，温度ゆらぎの計算予想値がパラメターにより，おおよそどう変動するかを示した[27]．観測衛星 MAP (Millimeter Anisotropy Probe ; NASA, 2000 年打ち上げ予定) や Planck Surveyer (ESA : ヨーロッパ宇宙局 : 2004 年打ち上げ予定) が動けば，宇宙背景輻射の精密値が得られると期待され，ハッブル定数も含めてここ数年で宇宙論のパラメター決定には大きな進展が期待される．

参考文献

1) 佐藤文隆，原　哲也 : 朝倉現代物理学講座 13，宇宙物理学，朝倉書店，1983
佐藤文隆 : 岩波講座 現代の物理学 11，宇宙物理，岩波書店，1995
2) E.W. Kolb and M.S. Turner : The Early Universe, Addison-Wesley, 1990
3) PDG : *Phys. Rev*., **D54** (1996), *EPJ*, **C3** (1998)
4) M. Fukugita, C.J. Hogan and P.J.E. Peebles : *Nature*, **366** (1993) 309
W. Freedman *et al.* : *Nature*, **371** (1994)
W. Freedman : Proc. 18th Texas Symp. on Relativistic Astrophysics and Cosmology, 1997, ed. A. Olinto, D.N. Schramm and J. Friedman, World Scientific, Singapore
5) J.C. Mather *et al.* : *Astrophys. J*., **354** (1990) 237
6) G. t'Hooft : *Nucl. Phys*., **B79** (1974) 276
A.M. Polyakov : *Sov. Phys. JETP Lett*., **20** (1974) 194
7) 佐藤勝彦 : 月刊フィジックス，**27** (8) (1983) 493
8) B. Schwarzshild : *Physics Today*, **51** (6) (1998) 17
9) B.W. Lee and S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett*., **39** (1977) 165
E.W. Kolb and K.A. Olive : *Phys. Rev*., **D33** (1986) 1202
10) G. Steigman : *Ann. Rev. Astron. Astrophys*., **14** (1976) 339
11) A.D. Sakharov : *Pisma ZhETF*, **5** (1967) 32
V.A. Kuzumin : *Pisma ZhETF*, **13** (1970) 335
L. Okun and Y. Zeldovich : *Comm. Nucl. Part. Phys*., **6** (1976) 69
12) M. Yoshimura : *Phys. Rev. Lett*., **41** (1978) 281
A.Y. Ignatiev *et al.* : *Phys. Lett*., **B76** (1978) 436
S. Dimopoulos and L. Susskind : *Phys. Rev*., **D18** (1978) 4500
S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett*., **42** (1979) 850
13) D.N. Schramm and M.S. Turner : *Rev. Mod. Phys*., **70** (1998) 303
14) G. Gamow : *Phys. Rev*., **70** (1946) 572 ; **74** (1948) 505 ; *Nature*, **162** (1948) 680 ; *Phys. Rev*., **75** (1949) 1093
R.A. Alpfer, H. Bethe and G. Gamow : *Phys. Rev*., **73** (1948) 803

15) M. Geller and J. Huchra : *Science*, **246** (1989) 897

16) H. Davis and P.J.E. Peebles : *Astrophys. J*., **267** (1985) 465
R. Sancisi and T.S. van Albada : Proc. IAU Symp. 117 "Dark Matter in the Universe," eds. J. Kormendy and G. Knapp (Reidel, Dordrecht, 1987), p. 69

17) P.J.E. Peebles : *Nature*, **371** (1986) 27

18) M. Davis and P.J.E. Peebles : *Astrophys. J*., **267** (1983) 465

19) V. de Lapparent, M.J. Geller and J.P. Huchra : *Astrophys. J*., **332** (1988) 44

20) E. Gawiser and J. Silk : *Science*, **280** (1998) 1405

21) 杉山　直：別冊日経サイエンス 109，宇宙の誕生と進化，p. 38-45

22) S.P. Boughn, E.S. Cheng and D.T. Wilkinson : *Astrophys. J. Lett*., **243** (1981) 113

23) G.F. Smoot *et al.* : *Astrophys. J*., **396** (1992) L1

24) C.L. Bennett *et al.* : *Astrophys. J*., **396** (1992) L7

25) 2)，p. 386 参照

26) R.D. Davies *et al.* : *Nature*, **326** (1987) 462
A. Kogut *et al.* : *Astrophys. J*., **401** (1992) 1

27) C.L. Burner, M.S. Turner and M. White : *Physics Today*, **50** (11) (1997) 32

付　録

A　ホモトピー

ホモトピー：　自由度 n の内部対称性 G をもつ場 ϕ^a $(a=1,2,\cdots,n)$ の運動方程式の解 $\phi^a(x_\mu)$ は，4 次元時空から n 次元 ϕ 空間への写像と見なせる．ϕ が連続関数であれば，x_μ が時空の点 P から Q へ連続的に動くとき，ϕ は ϕ 空間で点 A から B まで連続的に動く．$P\rightarrow Q$ の経路が変化すれば，$A\rightarrow B$ の経路も変化するであろう（図 A.1）．通常二つの経路は連続変形で一致させることができる．このとき，二つの経路は同じホモトピークラスに属する（homotopic）といい，経路変換する連続関数をホモトピーという．ϕ 空間が特殊な構造をしている場合，例えば図 A.1 (b) のようなトーラスの場合は経路 Φ と ψ は連続変換では一致させることはできない．このとき Φ と ψ は異なるホモトピークラスに属するという．物理的には区別できないが，ホモトピークラスの異なる真空が存在すれば，ソリトンが存在しうる．実際にソリトンが存在することを示すにはしばしば運動方程式を解かなければならないが，存在のための必要条件を一般的に議論し，クラス分けするのにホモトピーの議論が役に立つ．

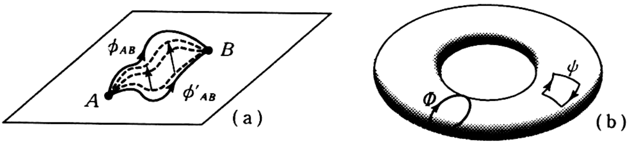


図 A.1　(a)　二つの径路 ϕ_{AB} と ϕ'_{AB} は連続に曲げて互いに一致させられる．
(b)　Φ と ψ は連続変形で互いに一致させることはできないので異なるホモトピークラスに属する．

S^1 と R^1：　リー群 G の表現行列は変数 $\{\omega^a\}$ でパラメター化できる．変数 ω の張る空間を群の多様体といい，この多様体の体積が有限であるとき群はコンパクトであるという．

例 1.　実数 x の集合 R^1 は加減算による群をつくる．変数領域は $-\infty<x<\infty$ は無限でありコンパクトでない．

例 2.　1 次元複素数空間の位相変換 $U(1)$ もしくは 2 次元実空間の回転 $(SO(2))$

は，位相もしくは回転角を θ として，$0\leqq\theta<2\pi$ であるからコンパクトであり，多様体の体積は 2π となる．これは円（1 次元空間の球 S^1）と同じトポロジーをもつ．B 点と A 点を同一視すれば，$A\leqq x<B$ は連続関数 $f(x)$ によって θ に変換可能であるので，同じトポロジーをもつ．$A(B)$ を $\pm\infty$ ととれば，無限遠点を同一視した R^1 になるから，この条件つきの R^1 は S^1 となる．同様に無限遠点を同一視した 2 次元平面 R^2（3 次元空間 R^3）は，2(3) 次元の球（3(4) 次元空間に埋め込まれた球面）$S^2(S^3)$ と，トポロジーとしては同一である．

多重連結：　例 3：$SU(2)$ と $SO(3)$：　$SU(2)$ 変換は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
U&=\exp(-i\theta\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}/2)=\cos\frac{\theta}{2}-i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2}\\
&=a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}\\
a^2&+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2=1
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

これは，4 次元空間に埋め込まれた超球面 (S^3) を表す．明らかに球面上の任意の閉ループは一点に収縮させることができる．これを $SU(2)$ 群は単連結である (simply connected) といい

$$\pi_1(SU(2))=0 \tag{A.2}$$

と書く．π_1 とは S^1 の $SU(2)$ 多様体への射影のホモトピークラス分けである．

一方，$SO(3)$ は 3 次元実空間の回転を表し，オイラー角を使えば

$$
\begin{aligned}
R&=e^{+i\alpha J_z}e^{+i\theta J_y}e^{i\beta J_z}\\
&=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&0\leqq\alpha<2\pi,\quad 0\leqq\theta<\pi,\quad 0\leqq\beta<2\pi
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

と表せる．$R(\theta+\pi)=R(\theta-\pi)=-R(\theta)$, $R(\theta)=R(\theta+2\pi)$ であるが，$SU(2)$ では $U(\theta)=-U(\theta+2\pi)$ である．スピノールは 2π 回転で符号を変えるのに反し，ベクトルは符号を変えない事実はこれが原因である．

3 次元空間の回転は，回転軸と回転角を決めてパラメター化できるので，回転軸の方向を向き，大きさが回転角に等しいベクトルの張る空間が，$SO(3)$ 群の多様体となる．これは，半径 π の球 (R^3) である．ただし，π 回転と $-\pi$ 回転とは等しいから，半径 π の球面の各点と原点の向こう側の対向点は同一視しなければならない．この多様体は 2 重連結である．なぜなら，一連の回転を表す線として 2 種類が考えられる（図 A.2）．経路 g_1 は一点に収縮させられるので点と同じホモトピークラスに属する．一方，経路 g_2 は回転角 θ が π を超す場合で，A 点に到達して π を超えた瞬間向かい側の A' に飛び出す．g_2 の線は一点に収縮することはできず，線と同一ホモトピークラスに属する．回転角が 2π を超えると再び向かい側に跳躍して元に戻るのでホモトピークラスとしては再び点と同一になる．g_1 を 0 に，g_2 を 1 に対応させ

ると，0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0 の代数を満たす整数 2 個よりなる群 Z_2 を構成する．これを

$$\pi_1(SO(3))=Z_2 \tag{A.4}$$

と書く．$SO(3)$ 群と $SU(2)$ 群は同じリー代数を満たしともにコンパクトであるが，$SU(2)$ が単連結であるのに反し $SO(3)$ は 2 重連結である．このとき，$SU(2)$ は $SO(3)$ の被覆 (covering) という．$SO(3)$ 群は，$SU(2)$ の中の Z_2 群 (群の要素としては，1 と $\exp(i\pi)$) を恒等変換と同一視することにより得られる．これを，$SO(3)=SU(2)/Z_2$ のように書く．一般に $SU(N)$ 群は，すべての群の要素と交換する $\exp(i2\pi n/N)(n=0,1,\cdots,N-1)$ を部分群として含む．

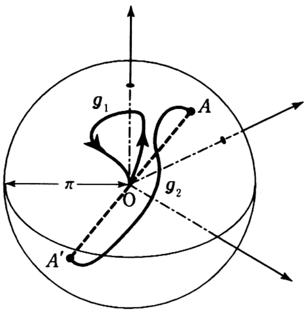


図 A.2　3 次元空間の回転 $SO(3)$ は回転軸と回転角でパラメター化できる．回転角の長さをもち任意の方向を向くベクトルの張る空間は半径 π の 3 次元球 (R^3) の内部である．$+\pi$ 回転と $-\pi$ 回転は等しいので半径 π の球面上の各点と球面の対向点は同一点である．連続回転は一つの径路をつくる．径路 g_1 は無回転 (原点 O) に縮小できるが，回転角が π を超す径路 g_2 は連続変換で g_1 と一致させることはできない．

縮退真空と巻つき数：　静的運動方程式の解としてのソリトンの存在条件は，ホモトピークラスの異なる縮退真空が存在し，かつ有限エネルギーをもつことである．縮退真空はポテンシャルを $V(\phi)$ とするとき

$$V(\phi)=0, \quad \frac{\partial V}{\partial\phi}=0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}>0 \tag{A.5}$$

を満たす ϕ の値 v が二つ以上存在するときに出現する．すなわち ϕ が内部対称性 G をもつとき，

$$\phi(r\to\infty)=v \tag{A.6}$$

が多価関数である条件を探すことが課題となる．時空において $r\to\infty$ の空間は，2 次元空間で S^1，3 次元空間で S^2 のトポロジーをもつので，時空から群の多様体への写像がどう対応するかを知る必要がある．

a．2次元空間

2次元空間で $U(1)$ 対称性を満たすヒッグス場 $\phi(x)=(\phi_1\pm i\phi_2)$ を考える．真空配位が $\phi(r\to\infty)=v\exp[-ig(\theta)]$, $g(2\pi)=g(0)+2\pi n$ を満たすとしよう．空間内の $r=(x^2+y^2)^{1/2}\to\infty$ は円 S^1 と同じトポロジーをもち θ（$\theta=0$ と 2π は同一視）で表せる．上の議論から ϕ は実空間での S^1 から ϕ 空間の S^1 への射影を表す．群変数として次の関数を考えよう（図 A.3 参照）．

$$g_1(\theta)=0 \qquad 0\leqq\theta<2\pi \tag{A.7 a}$$

$$g_2(\theta)=\begin{cases}\alpha\theta & 0\leqq\theta<\pi\\ \alpha(2\pi-\theta) & \pi\leqq\theta<2\pi\end{cases} \tag{A.7 b}$$

$$g_3(\theta)=\theta \qquad 0\leqq\theta<2\pi \tag{A.8 c}$$

$$g_4(\theta)=2\theta \qquad 0\leqq\theta<2\pi \tag{A.8 d}$$

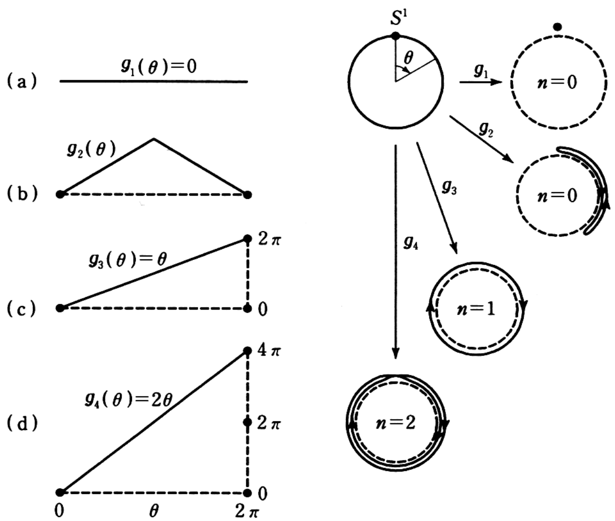


図 A.3　$S^1\to S^1$ への写影のホモトピークラス分け
時空の点を $S^1(0\leq\theta<2\pi)$ で表し，写影 $g_i(\theta)$ がやはり1次元の閉曲線もしくは端点を同一視した直線となる場合．(a)~(d) はそれぞれの g_i を表す．

g_1 は恒等変換を表す．g_2 は明らかに連続変形で g_1 にもってゆけるから g_1 と同じホモトピークラスに属する．しかし，g_3 は円 S^1 の周りに1回巻きついており，連続変形で g_1 に変えることはできない．同様に g_4 は2回巻きついており，g_1, g_3 とは違うホモトピークラスに属する．トポロジー指数もしくは巻つき数 n を

$$n=\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}\mathrm{d}g=\frac{i}{V_G}\oint U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{A.9}$$

で定義する．V_G は群の多様体の体積でいまの場合は 2π である．被積分関数は U か

ら群の変数を抽出する演算であり，θ が $0\to 2\pi$ のとき，群変数 g は $0\to 2n\pi$ である．$n(g_1)=n(g_2)=0$，$n(g_3)=1$，$n(g_4)=2$ を与えるので，整数 n で区別される縮退真空が存在することになる．$S^1\to S^1$ の射影がホモトピー指数 n により区別されるホモトピークラスに分けられるとき，数学用語では，

$$\pi_1(S^1)=Z \qquad \text{(A. 10 a)}$$

と表し，第1種のホモトピー群と呼ぶ．Z は加減算による整数の群の集合を構成する．扱う群 G を表示するときは

$$\pi_1(U(1))=Z \qquad \text{(A. 10 b)}$$

とも書く．一般に $S^n\to S^m$，$S_n\to G$ の射影の場合のホモトピークラス分けを，$\pi_n(S^m)$，$\pi_n(G)$ と書く．

b.　3次元空間

$SO(3)$ 対称性を満たすアイソスピン1の $\boldsymbol{\phi}(\phi^a: a=1,2,3)$ が，$r\to\infty$ で真空配位

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\phi}^2=\hat{\phi}_1{}^2+\hat{\phi}_2{}^2+\hat{\phi}_3{}^2=1 \qquad r\longrightarrow\infty$$

$$\hat{\phi}=\phi/v \qquad \text{(A. 11)}$$

を満たすものとする．$\boldsymbol{\phi}$ は長さ v の任意の方向を向くベクトルとなる．$\boldsymbol{\phi}$ ベクトルを中心軸とする回転 ($SO(2)$ もしくは $U(1)$) によって真空の値は変わらないから，$SO(3)$ 対称性が自発的に破れて $U(1)$ 対称性が残る問題を扱っている．$\boldsymbol{\phi}$ の配位はアイソスピン空間の球面として表されるから，ϕ^a $(r\to\infty)$ は時空の S^2 からアイソスピン空間の S^2 への射影を表す．これを $\pi_2(S^2)$ と書き，トポロジーの数学から

$$\pi_2(S^2)=Z \qquad \text{(A. 12)}$$

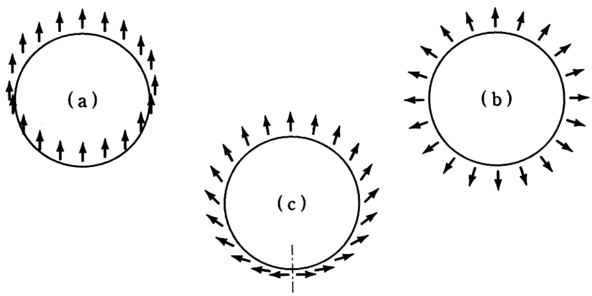


図 A. 4　$S^2\to S^2$ のホモトピー

3次元空間 (x, y, z) の球面 (S^2) からアイソスピン空間への写影 $\hat{\phi}(x, y, z)$，$\hat{\phi}=(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$，$\hat{\phi}^2=\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2=1$ とする単位ベクトルをとる．

(a)　$\hat{\phi}=(0, 0, 1)$，(b)　$\hat{\phi}=(\xi, \eta, \zeta)$　$\xi=\xi/r, \cdots, r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$
　アイソスピンベクトルを球面上すべての点で連続的に (a) へ移行させることはできない．

(c)　南極に穴をあけ，そこを除けば連続移行可能である．

であることが知られている[1]. この直観的な説明を図 A.4 に示す. 図 A.4 (a) は, $\hat{\phi}=(0,0,1)$, 図 A.4 (b) は $\hat{\phi}=(x/r, y/r, z/r)$ に対応する. (b) の配位をもつ $\hat{\phi}$ の方向 (矢印) から, 球面上のすべてで連続的な変換関数を使って, (a) の配位にもってゆくことはできない. しかし, 南極点でだけは連続でなくてよいとすれば, 図 A.4 (c) のように連続変換で (a) の配位にもってゆける. すなわち, (a) の配位と (b) の配位は異なるホモトピークラスに属するのである.

ホモトピークラスを指定する指数 (巻つき数) は次式で定義される.

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{abc}\partial_i\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c \tag{A.13 a}$$

これが, 整数 n を与えることを見るために, ε_{ijk} の反対称性から

$$\partial_i\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c=\partial_i(\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c)$$

であることを使って表面積分に直し,

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}S_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c$$

次に, 角変数 θ, α で書き換える. jk 平面の面積要素 (変数変換のジャコビアン)

$$\mathrm{d}S_i=\varepsilon_{imn}\frac{\partial x_m}{\partial\theta}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha \tag{A.14}$$

を使うと

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c\varepsilon_{imn}\frac{\partial x_m}{\partial\theta}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\\&=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\,\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a\frac{\partial(\hat{\phi}^b,\hat{\phi}^c)}{\partial(\theta,\alpha)}\end{aligned} \tag{A.13 b}$$

Q のこの定義は, $U(1)$ における巻つき数 (A.5) と同じく, 群の変数を取り出す演算になっている. 被積分関数のうち $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha$ 以降は $\hat{\phi}\to(\theta,\alpha)$ のジャコビアンであるから, 上式は ϕ 空間での積分に直せる.

$$=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}S_\phi{}^a\hat{\phi}^a=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}S_\phi \tag{A.13 c}$$

ϕ 空間の S^2 は半径が 1 の表面積であるから, x_i が時空の S^2 の全表面を動くとき, Q は ϕ 空間の表面積を被う回数 n を与える. 図 A.4 (a) の配位は $n=0$, (b) の配位は $n=1$ に対応する.

剰余群: $SO(3)$ 演算は, 回転軸を選び回転角を与えることで決まる. 上で考察した真空配位 $\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=1$ は回転軸を決めるときの制限である. 回転軸のまわりの回転は $U(1)$ 対称性をもつから, 真空は $U(1)$ 演算で不変であり, 真空の決め方の自由度は, $SO(3)$ から $U(1)$ を除いた演算の自由度だけある. 群 G から, 群 H を取り出したとき, H に属さない要素を M_i と書くと, 群 G は形式的に

$$G=H\oplus HM_1\oplus HM_2\oplus\cdots \tag{A.15}$$

と書ける. M_i の張る空間を剰余空間といい (商空間ともいう) G/H と書く. 上の考

察から，$SO(3)/U(1)$ は，トポロジーとしては S^2 に同形なことがわかる．

モノポールの存在条件：　モノポールを電磁場と共存するソリトンとする．群 G が自発的に破れて $U(1)$ を含む H が残ったときのソリトンの存在条件は，S^2（3次元空間の無限遠点）から G/H への射影が，複数のホモトピークラスをもつこと，すなわち

$$\pi_2(G/H)\neq 0 \tag{A.16}$$

である．ここで，再び数学の助けを借りると[1)]

○ 群 G が単連結の場合（例：$SU(n)$），

$$\pi_1(G)=0, \qquad \pi_2(G/H)=\pi_1(H) \tag{A.17 a}$$

$SU(N)$ の対称性が破れて $U(1)$ が残るときは，

$$\pi_2(SU(N)/U(1))=\pi_1(U(1))=Z \tag{A.17 b}$$

であり，モノポール存在の必要条件を満たす．

○ 群 G が2重連結の場合（例：$G=SO(n)$）

$$\pi_1(G)=Z_2, \qquad \pi_2(G/H)=\pi_1(H) \tag{A.18 a}$$

単連結の場合と同じく必要条件を満たすが，親の群が2重連結であるので，真空配位への射影は2：1となり，

$$\pi_2(SO(3)/U(1))=Z/Z_2=\text{偶数の加算群} \tag{A.18 b}$$

この場合モノポールの磁荷は，ディラック磁荷の2倍となる．

○ その他，いくつかの式をあげておく．

$$\begin{aligned}
&\pi_n(G\otimes F)=\pi_n(G)+\pi_n(F)\\
&\pi_n(S^n)=Z, \quad \pi_n(S^m)=0 \quad n<m\\
&\pi_{i+1}(S^2)=\pi_i(S^1)+\pi_{i+1}(S^3), \quad i\geqq 1\\
&\pi_1(U(1))=Z, \quad \pi_k(U(1))=0, \quad k\geqq 2\\
&\pi_1(SU(N))=0, \quad \pi_2(SU(N))=0, \quad \pi_3(SU(N))=Z, \quad N\geqq 2\\
&\pi_1(SO(N))=Z_2, \quad \pi_2(SO(N))=0, \quad N\geqq 2, \quad \pi_3(SO(3))=Z\\
&\pi_k(U(N))=\pi_k(SU(N)), \quad k\geqq 2
\end{aligned} \tag{A.19}$$

特別な場合として，$\pi_3(SU(2))=Z$ はインスタントン存在条件である．

ワインバーグ-サラム理論：　ワインバーグ-サラムモデルは，上の定理からするとモノポールをもってもよさそうであるが，電磁気 $U(1)_{EM}$ の $SU(2)\times U(1)$ の中への埋め込み方が，正則的でなく $U(1)_{EM}$ がコンパクトでないためもてない．

理由：$SU(2)\times U(1)_Y$ の中には二つの $U(1)$ 部分群があり，生成子は I_3 と Y である．電磁気の $U(1)$ はその直積演算である．

$$\exp(iQ\alpha)=\exp(iI_3\sin\theta_W\beta)\exp(iY\cos\theta_W\gamma)$$

$U(1)$ 群のパラメター領域は，円もしくは両端点を同一視した直線である．したがって直積群のパラメター領域は，図A.5で表されるように長方形ABCDで，辺ABとDC，辺ADとBCを同一視して得られる．電磁気のゲージ変換の位相 α は，

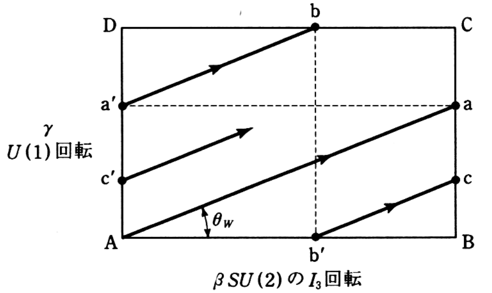


図 A.5　標準理論の群変数 α の多様体の体積は無限に大きい
I_3 回転の変数 $0 \le \beta < 2\pi$ で，AB と DC は同一 β を表す．ハイパーチャージの $U(1)$ 回転 $0 \le \gamma < 2\pi$ で AD と BC は同一 γ を表す．電磁気のゲージ変数 $\alpha = \sin\theta_W\beta + \cos\beta_W\gamma$，$\theta_W$ はワインバーグ角．A から出発した α は辺に到達すると対向辺に飛ぶので Aaa′bbcc′…の道を描く．$\tan\theta_W$ は有理数でないので，α のたどる道は閉じないで永遠に続く．

$$Q\alpha = I_3 \sin\theta_W\beta + Y\cos\theta_W\gamma \tag{A.20}$$

で与えられるので，図 A.4 におけるような経路上を動く．勾配が $\gamma/\beta = (I_3/Y)\tan\theta_W$ が有理数でないため，A から出発する線が閉じることがなく α のたどる線は無限の長さをもつ．すなわち，ワインバーグ-サラム理論における $U(1)$ 群の多様体は無限大の体積をもちコンパクトでない．したがって $\pi_1(G/H) = 0$ となり，モノポールは存在しえない．しかし，式 (A.17) が示すように，大統一理論が正しく，$SU(5)$ のような単純群が，最初に（すなわち大統一エネルギーで）自発的に破れるときに $U(1)$ が残るならばモノポールが発生する．

参 考 文 献

1) N. Steenrod : The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, 1951
(邦訳) 大口邦夫：ファイバー束のトポロジー，吉岡書店，1976
2) Chan Hong-Mo and Tsou Sheung Tsun : Some Elementary Gauge Theory Concepts, World Scientific, Singapore, 1993.

B　宇 宙 論 補 足

B.1　宇 宙 の 幾 何 学

ロバートソン-ウォーカーの計量

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

の幾何学を考察する．

$k=0$ の場合：

ロバートソン-ウォーカー計量が平坦なユークリッド空間を表すことは明らかであ

る.

$k=+1$ の場合：

$r=\sin\psi$ とすると，$\mathrm{d}r^2/(1-r^2)=\mathrm{d}\psi^2$ であるので，

$$x=R\sin\psi\sin\theta\sin\phi$$
$$y=R\sin\psi\sin\theta\cos\phi$$
$$z=R\sin\psi\cos\theta$$
$$u=R\cos\psi \tag{B.1}$$

とおけば，

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}R^2+R^2[\mathrm{d}\psi^2+\sin^2\psi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)]$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=R^2 \tag{B.2}$$

これから，点 $\boldsymbol{r}(x, y, z, u)$ は，4 次元空間に埋め込まれた半径 R の超球表面を表すこと，したがって，この 3 次元空間は閉じており，R が空間のサイズを表すことがわかる.

$k=-1$ の場合：

$r=\sinh\psi$ とおけば，$\mathrm{d}r^2/(1+r^2)=\mathrm{d}\psi^2$ であるので，

$$x=R\sinh\psi\sin\theta\sin\phi$$
$$y=R\sinh\psi\sin\theta\cos\phi$$
$$z=R\sinh\psi\cos\theta$$
$$u=R\cosh\psi \tag{B.3}$$

とおけば，

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2-\mathrm{d}u^2=-\mathrm{d}R^2+R^2[\mathrm{d}\psi^2+\sin^2\psi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)]$$
$$u^2-x^2-y^2-z^2=R^2 \tag{B.4}$$

これから，点 $\boldsymbol{r}(x, y, z, u)$ は，4 次元空間に埋め込まれた回転双曲面を表すことがわかる．すなわち空間は開いている.

フリードマン方程式：　パラメターをいくつか定義する.

ハッブルパラメター：	$H=\dot{R}/R$
臨界密度	$\rho_c=3c^2H^2/(8\pi G)$
密度パラメター	$\Omega=\rho/\rho_c$
曲率パラメター	$K=kc^2/(R^2H^2)$
減速パラメター	$q=-(\ddot{R}/\dot{R})/(\dot{R}/R)=-\ddot{R}/(RH^2)$
宇宙項パラメター	$\Omega_\lambda=\Lambda c^2/(3H^2)$　(B.5)

これらのパラメターを使えば，フリードマン方程式 (8.2) は，

$$\Omega-K+\Omega_\lambda=1 \tag{B.6}$$

フリードマン方程式を微分して，エネルギー方程式 (8.5) を使えば，

$$q=(1+3P/\rho)\Omega/2-\Omega_\lambda \tag{B.7}$$

を得る．現在 $t=t_0$ では，物質優勢 ($P=0$) であるから，

$$\Omega_0 - K_0 + \Omega_{\lambda 0} = 1, \qquad q_0 = \Omega_0/2 - \Omega_{\lambda 0} \tag{B. 8}$$

を意味する．Ω_0 と q_0 は観測量であるから，K_0 と Ω_λ が決められ，R_0 を決めれば，k と Λ が決められる．

長さ：共動座標で，r＝一定の円周の長さと球面積は，$\mathrm{d}r=0$ として ϕ もしくは θ で積分して，それぞれ $2\pi r, 4\pi r^2$ となるが，半径の長さ l は，

$$l = \int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{[1-kr^2]^{1/2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r & k=+1 \\ r & k=0 \\ \sinh^{-1} r & k=-1 \end{cases} \tag{B. 9}$$

で与えられる．例として閉じた空間 $(k=+1)$ の場合，北極を通る中心軸のまわりに半径 r の円を描くとき円周は $2\pi r$ であるが，円の中心から円周までの距離 l は極角 l の円弧であり，極付近では $l \approx r$ が成立するが，一般には $l > \sin l = r$ である．

r はよくでてくる量であるが，観測量に結びつけるときは，光の行路 $\mathrm{d}s^2=0$ を使う．このとき，(8.8) を使えば

$$l = \int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{[1-kr^2]^{1/2}} = \int_t^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_R^{R_0} \frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}R} = \frac{1}{R_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{H(t)} \tag{B. 10}$$

である．$H(t)$ は次のようにして求められる．

物質優勢のとき，$\rho R^3 = \rho_0 R_0{}^3$ であるので，フリードマン方程式 (8.2) より

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0{}^3}{R^3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{B. 11 a}$$

$$H_0{}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{k}{R_0{}^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{B. 11 b}$$

これに，$R_0/R = 1+z$ を入れ，(B.5) を使えば

$$H(t) = H_0[\Omega_\lambda + \Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0-\Omega_{\lambda 0})(1+z)^2]^{1/2} \tag{B. 12 a}$$

である．これより，$\Omega_\lambda = 0$ のとき

$$H(t) = H_0(1+z)[\Omega_0(1+z) + (1-\Omega_0)]^{1/2} \tag{B. 12 b}$$

$1+z \gg \Omega_0{}^{-1}$ のとき

$$H(t) \sim H_0 \Omega_0{}^{1/2}(1+z)^{3/2} \tag{B. 12 c}$$

が成立する．(B.12 a) を (B.10) に入れ，(B.9) と比較すると，$\Omega_\lambda = 0$ のとき，

$$r = \frac{1}{H_0 R_0} \frac{2[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)\{(\Omega_0 z + 1)^{1/2} - 1\}]}{\Omega_0{}^2(1+z)} \tag{B. 13 a}$$

$\Omega_0 z \ll 1$ のところでは，

$$r \approx \frac{1}{H_0 R_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \cdots\right] \tag{B. 13 b}$$

(B.13 a) 式は $\Omega_\lambda = 0$ として導いたが，(B.13 b) 式は一般の $q_0 = \Omega_0/2 - \Omega_\lambda$ のときにも成立する．

距離の定義：　t＝一定の超平面では，共動座標 $0 \sim r$ の距離は $R(t)l$ で与えられる．これが距離の定義として使えそうであるが，膨張宇宙ではあまり役に立つ量で

はない．実際に観測に結びつく距離の定義として次の三つをあげておく．

光度距離 (luminosity distance)：　遠くの距離 d にある銀河の絶対光度 L がわかったとして，それをわれわれが単位面積，単位時間あたりの光量 F として観測したとする．ユークリッド幾何学では，

$$L=4\pi d_L{}^2F \tag{B. 14}$$

が成立するので，これで光度距離 d_L を定義する．実際には宇宙は膨張しているので，共動座標 r で時刻 $t\sim t+\delta t$ に光が放出され，地球 $(r=0)$ で時刻 $t_0\sim t_0+\delta t_0$ に観測したとする．$r=$一定の球の表面積は，$t=t_0$ で $4\pi(R_0r)^2$ で与えられる．一方，フォトンの数密度 n_γ は $\sim T^3\sim R^{-3}$ であり，共動体積の中の全フォトン数 $N_\gamma\sim E_\gamma/(h\nu)$ が保存されるので，

$$\frac{L\delta t}{\nu}=4\pi R_0{}^2r^2\frac{F\delta t_0}{\nu_0} \tag{B. 15}$$

$\nu/\nu_0=\delta t_0/\delta t=1+z$ を入れ，(B.14) の定義式を使えば

$$d_L=R_0r(1+z)=\frac{2[\Omega_0z+(\Omega_0-2)\{(\Omega_0z+1)^{1/2}-1\}]}{H_0\Omega_0{}^2} \tag{B. 16}$$

$\Omega_0z\ll1$ ならば

$$H_0d_L\approx z+\frac{1}{2}(1-q_0)z^2+\cdots \tag{B. 17}$$

が成立する．

角径距離 (angular diameter distance)：　視線方向に直角な天体の大きさ D が既知として，それを見込む角を $\delta\theta$ とするとき，$d_A=D/\delta\theta$ で定義する距離を角径距離という．ユークリッド幾何学が成立すれば，$d_A=d_L$ であるが膨張宇宙では異なる．D を共動座標 r が与えられたときの円弧の長さ s とすると $s=r\delta\theta$, D は光の発せられる時刻 t_1 での長さであるから，$D=R(t_1)s$，したがって

$$d_A=\frac{D}{\delta\theta}=\frac{R(t_1)r\delta\theta}{\delta\theta}=R(t_1)r=R_0\frac{r}{1+z}=\frac{d_L}{(1+z)^2} \tag{B. 18 a}$$

$1+z\gg\Omega_0$ のとき，

$$d_A\sim\frac{2}{H_0\Omega_0z} \tag{B. 18 b}$$

銀河数密度距離：　銀河の数密度 n_g が共動座標系では一定とすると，微小共動体積中の銀河の数は，(B.10)，(B.12 b) より

$$\mathrm{d}N_g=n_g\frac{r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega}{\sqrt{1-kr^2}}=\frac{n_gr^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\Omega}{R_0H_0(1+z)[1+\Omega_0z]^{1/2}} \tag{B. 19}$$

したがって，銀河の数密度を赤方偏移 z の関数として表し，$z\Omega_0\ll1$ のとき

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}N_g}{\mathrm{d}z\mathrm{d}\Omega}\approx\frac{n_g}{(H_0R_0)^3}[1-2(1+q_0)z+\cdots] \tag{B. 20}$$

B. 2　再結合温度

晴上がり時（再結合：recombination）の温度は次のようにして計算できる．電子，陽子と水素はフォトンと次のような平衡状態にあるとする．

$$e^- + p \longleftrightarrow \mathrm{H} + \gamma \tag{B. 21}$$

フォトンの化学ポテンシャルはゼロであるので，平衡状態にあれば，化学ポテンシャルについて次の式が成立する．

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H \tag{B. 22}$$

宇宙は電気的に中性であるとすれば，

$$n_e = n_p, \qquad n_p + n_H = n_B \tag{B. 23}$$

非相対論的粒子の数密度

$$n = g_i \left[\frac{mT}{2\pi}\right]^{3/2} \mathrm{e}^{(\mu - m)/T} \tag{B. 24}$$

を使って（B.22）から化学ポテンシャルを消去すると，

$$n_H = n_e n_p \left[\frac{g_H}{g_e g_p}\right] \left[\frac{m_H}{m_p} \frac{2\pi}{m_e T}\right]^{3/2} \mathrm{e}^{B/T} \tag{B. 25 a}$$

$$B = m_e + m_p - m_H = 13.6\ \mathrm{eV} \tag{B. 25 b}$$

ここで，

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_B} = \frac{n_p}{n_B}, \quad n_B = \eta_B n_\gamma, \quad \eta_B = 2.75 \times 10^{-8} (\Omega_B h^2) \tag{B. 26 a}$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \qquad \zeta(3) \simeq 1.202 \tag{B. 26 b}$$

を導入し，$g_H = 4$，$g_p = g_e = 2$ を入れれば

$$\frac{n_H n_B}{n_p n_e} = \frac{1 - X_e}{X_e^2} = n_B \left[\frac{m_e T}{2\pi}\right]^{-3/2} \mathrm{e}^{B/T} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta_B \left[\frac{T}{m_e}\right]^{3/2} \mathrm{e}^{B/T} \tag{B. 27}$$

となる．これを熱平衡状態におけるイオン結合のサハの式という．$T = T_0(1 + z_{rec}) = 2.73(1 + z_{rec})$ として，$X_e = 0.1$ になる温度を再結合温度 T_{rec} とすると，

$$1 + z_{rec} \simeq 1300, \qquad T_{rec} = 0.308\ \mathrm{eV} = 3575\ \mathrm{K} \tag{B. 28}$$

を得る．$T = 0.308\ \mathrm{eV}$ を超えると X_e は急速に減少し，$T \simeq 0.26\ \mathrm{eV} = 3030\ \mathrm{K}$ あたりで，$X_\infty \simeq 10^{-4} \sim 10^{-5}$ くらいに落ちつく．

これを切り離し時刻 t_{dc} とすると，

$$\begin{aligned} z_{dc} &= 1100 \\ t_{dc} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{dc})^{-3/2} = 5.64 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2}\ \mathrm{sec} \\ &\simeq 300000\text{年} \end{aligned} \tag{B. 29}$$

B. 3　ニュートリノ切り離し温度

ニュートリノ切り離しの温度を計算するために，まずニュートリノと核子の散乱

断面積を計算する．

$$\nu_e(p_1)+n(p_2)\longrightarrow e^-(p_3)+p(p_4)$$
$$\bar{\nu}_e(p_1)+p(p_2)\longrightarrow e^+(p_3)+n(p_4) \tag{B. 30}$$

反応の散乱振幅を T_{fi} と書くと

$$T_{fi}=\int d^4x\frac{G_F}{\sqrt{2}}\langle f|[\bar{p}(x)\gamma^\mu(1+g_A\gamma^5)n(x)][\bar{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu(x)]|i\rangle \tag{B. 31}$$

中性子と陽子は動かないものとすると $\mu=0$ 成分のみ効く．

$$=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\int d^4x\langle p_4|\bar{p}(x)\gamma^0(1+g_A\gamma^5)n(x)|p_2\rangle e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x}$$
$$\times\bar{u}(p_3)\gamma^0(1-\gamma^5)u(p_1)$$
$$=2\pi\delta(m_n-m_p+E_1-E_3)\mathcal{M}_{fi} \tag{B. 32 a}$$
$$\mathcal{M}_{fi}=(G_F/\sqrt{2})\langle 1+g_A\sigma\rangle 2M\bar{u}(p_3)\gamma^0(1-\gamma^5)u(p_1) \tag{B. 32 b}$$

行列要素を自乗して中性子のスピン平均をとると（ニュートリノのスピン平均はとらない）

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2=16M^2G_F{}^2(1+3g_A{}^2)E_1E_3(1+v\cos\theta) \tag{B. 33}$$

θ は電子とニュートリノが張る角度である．断面積は，散乱振幅の自乗を始状態フラックスで割り，終状態位相体積を掛けて得られる．

$$\sigma=\int\frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{4p_1M}\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2M2E_3}=\frac{G_F{}^2}{\pi}(1+3g_A{}^2)p_3E_3 \tag{B. 34}$$

次に，弱い相互作用による熱反応が切離され，中性子や陽子の数が凍結される（freeze）温度を T_F とする．T_F の値は，反応率 $\Gamma(\nu_e n\to e^-p)$ が，宇宙膨張速度 H^{-1} に等しいとおいて得られる．$\Gamma=n\sigma v$ であるから，

$$\sigma(\nu_e n\to e^-p)=\frac{G_F{}^2}{\pi}(1+3g_A{}^2)p_fE_f\simeq\frac{G_F{}^2}{\pi}(1+3g_A{}^2)(3.2T)^2 \tag{B. 35}$$

最後の式は，(8.10)，(8.11) から得られる $\langle E\rangle\approx\rho/n\approx 3.2\ T$ を使った．

$$n_\nu=g_\nu\frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3 \tag{B. 36}$$

を使い，$H\simeq 1.66g_*{}^{1/2}T^2/M_{Pl}$(8.25)，$g_*(T>T_F)\simeq 5.44$ を入れて計算すると，$T_F\simeq$ 1.1 MeV を得る．$e\bar{e}\leftrightarrow\nu\bar{\nu}$，$\nu(\bar{\nu})e\leftrightarrow\nu(\bar{\nu})e$ などをも取り入れたより詳しい計算によれば，$T_F\simeq 0.72$ MeV である[1]．

参考文献

1) D.N. Schramm and M.S. Turner : *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 303
E.W. Kolb and M.S. Turner : The Early Universe, § 4.1, Addison-Wesley, 1990

B.4 ヴィリアル定理

ヴィリアル定理は，空間的に孤立した系でその構成要素間に働く力が座標の同次関数である保存力のとき，全系の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U の時間的平均量に関する関係式を与える．簡単のため N 個の質量 m の質点からなる系を考える．各粒子の位置を r_i とすると

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U(r_1,\cdots)}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \qquad K=\sum\frac{p_i^2}{2m} \tag{B.37}$$

U が $\boldsymbol{r}_i$ の n 次の同次関数であるならば，$U(a\boldsymbol{r}_1,\cdots)=a^nU(\boldsymbol{r}_1,\cdots)$ であるので，

$$\sum\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}=nU \tag{B.38}$$

が成立する．K を変形すれば，

$$2K-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{p}_i\right]=-\sum\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\sum\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}=nU \tag{B.39}$$

ここで長時間平均をとれば，孤立系であるので，左辺第2項は0となり，

$$\langle K\rangle=\frac{n\langle U\rangle}{2} \tag{B.40}$$

エネルギー保存則より

$$E=K+U \tag{B.41}$$

であるので，上の2式より

$$\langle K\rangle=\frac{n}{n+2}E, \qquad \langle U\rangle=\frac{2}{n+2}E \tag{B.42}$$

N が大きく十分に時間が経過しているときは，系は熱力学的平衡状態にあると考えられる．温度を T とすると

$$\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle=\frac{1}{N}\langle K\rangle=\frac{n\langle U\rangle}{2N}=\frac{n}{2}\langle u\rangle \tag{B.43}$$

(B.43) で定義される温度をヴィリアル温度といい，完全な熱力学的平衡状態といえない系にも適用する．

ポテンシャルが重力による場合は $n=-1$ であり，

$$\langle K\rangle=-\frac{1}{2}\langle U\rangle=-E \tag{B.44}$$

系の全質量が M で半径 R の球状に一様に広がった銀河団を考える．熱力学的平衡が成立するという条件で，

$$\langle u\rangle=-\frac{5}{3}G\frac{mM}{R}=\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle \tag{B.45}$$

したがって，銀河団内の平均速度分散 $\langle v^2\rangle$，平均距離 R を測ることにより，銀河団全体の質量を計算できる．

索　引

ア　行

カ　行

サ 行

タ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

長島順清（ながしまよりきよ）

1938年　東京都に生まれる
1965年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　博士課程修了
現　在　大阪大学大学院理学系研究科
　　　　物理学専攻・教授
　　　　理学博士

朝倉物理学大系 6

高エネルギー物理学の発展　　　定価はカバーに表示

1999年 6月20日　初版第1刷

著　者　長　島　順　清
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6-29
郵 便 番 号　162-8707
電　　話　03(3260)0141
F　A　X　03(3260)0180
http://www. asakura. co. jp

〈検印省略〉

平河工業社・渡辺製本

ISBN 4-254-13676-5　C 3342　　Printed in Japan

朝倉物理学大系

荒船次郎・江沢　洋・中村孔一・米沢富美子編集

1	解　析　力　学　I	山本　義隆 中村　孔一　著	本体4800円
2	解　析　力　学　II	山本　義隆 中村　孔一　著	本体4800円
3	素粒子物理学の基礎 I	長島　順清　著	本体4800円
4	素粒子物理学の基礎 II	長島　順清　著	本体4800円
5	素粒子標準理論と実験的基礎	長島　順清　著	本体6800円
6	高エネルギー物理学の発展	長島　順清　著	
7	量子力学の数学的構造 I	新井　朝雄 江沢　　洋　著	
8	量子力学の数学的構造 II	新井　朝雄 江沢　　洋　著	
9	多　体　問　題	高田　康民　著	
10	統　計　物　理　学	西川　恭治 森　　弘之　著	
11	原　子　分　子　物　理　学	高柳　和夫　著	

価格（税別）は1999年6月現在